

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Tomislav Žarko

EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE  
STUPNJA POLARIZACIJE I BREWSTEROV  
KUT

Diplomski rad

Zagreb, 2016

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: FIZIKA I INFORMATIKA – Nastavnički

**Tomislav Žarko**

Diplomski rad

**Eksperimentalno određivanje stupnja  
polarizacije i Brewsterov kut**

Voditelj diplomskog rada: Doc. dr. sc. Nikola Poljak

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2016.



## Sažetak

*Ovaj rad se bavi teorijsko-eksperimentalnim istraživanjem vrste širenja elektromagnetskog vala. Metodom polarizacije elektromagnetskih valova refleksijom. U kojim je prvi cilj utvrditi **Brewsterov** kut, pod kojim je reflektirani elektromagnetski val potpuno polariziran. Zatim je drugi cilj pomoću analizatora utvrditi vrstu širenja elektromagnetskog vala.*

## **Abstract**

*This paper deals with theoretical and experimental research of the type of spreading electromagnetic wave using the polarization of electromagnetic waves reflection. The primary goal of the method is to determine the Brewster angle, under which the reflected electromagnetic wave is completely polarized, after which by using analyzer determines the spread of the electromagnetic wave.*

1. Uvod.....	7
2. Matematički opis titranja i valova.....	5
2.1. Harmonijski oscilator .....	5
2.1.1. Harmonijski transverzalni oscilator .....	14
2.1.2. Jednadžba titraanja vala, homogene žice .....	18
2.1.3. Matematički opis valnog gibanja .....	23
3. Elektromagnetski valovi .....	29
3.1. Gaussov zakon električnog polja, prva Maxwellova jednadžba.....	32
3.2. Gaussov zakon za magnetsko polje, druga Maxwellova jednadžba.....	35
3.3. Faradayev zakon indukcije, treća Maxwellova jednadžba .....	37
3.4. Ampèrov zakon, četvrta Maxwellova jednadžba .....	39
4. Teorijsko određivanje stupnja polarizacije i Brewsterov kut.....	46
4.1. Polarizacija valova.....	47
4.2. Fresnelove jednadžbe .....	49
4.3. Teorijsko određivanje stupnja polarizacije i Brewsterov kut .....	62
5. Eksperimentalno određivanje stupnja polarizacije i Brewsterov kut.....	67
7. Metodički dio.....	76
8. Zaključak .....	89
8. Literatura.....	98

## 1. Uvod

**Svjetlost** koja dolazi na planet Zemlju od naše najbliže zvijezde Sunca sudjeluje u životu koji se odvija na Zemlji. Svojim zrakama daje najznačajniju ulogu u stvaranju sve raskoši biljnog, životinjskog i čovjekovog života. Naime, biljke direktno za svoj rast (život) na Zemlji dobivaju energiju u obliku svjetlosti, koja se u procesu fotosinteze pretvara u kemijsku energiju, tako da se dio te energije uskladišti kao unutrašnja kemijska energija biljke, a dio u fotosintezi dobiju molekule kisika koje iz biljke odlaze u zrak. Taj oblik kemijske energije ljudi i životinje prehranom (biljki + vode) uz udisanje kisika unose u vlastiti organizam, gdje se u biološkom procesu njihovog organizma kemijska energija pretvara u energiju potrebnu za život!

Stoga je opravdano da u svim čovjekovim filozofskim, vjerskim i kulturnim djelatnostima **svjetlost** zauzima ulogu od posebno važnog interesa. Kroz povijest čovjekovog razvoja postojale su različite ideje o tome što je **svjetlost**.

Prvu pravu, znanstvenu (dokazima potkrijepljenu), intelektualnu ekspanziju razvoja razumijevanja što je to **svjetlost** radi **Galileo Galilei** (1564-1642).

U renesansi, dolazi do velikih promjena u političkom i kulturnom djelovanju, što vodi k velikim znanstvenim inovacijama i promjenama.

Posebno je zanimljiva Firenza u Italiji, gdje se razvija financijski sustav. Obitelj **Medici** formira prve banke. No, to nije bila jedina njihova zasluga. Oni uspijevaju prikupiti, financirati te zaštititi najistaknutije osobe, kao što su: arhitekt **Filippo Brunelleschi**, slikar i inženjer **Leonardo da Vinci**, slikar - kipar **Michelangelo Buonarroti**, te znanstvenik **Galileo Galilei**.



Galileo Galilei  
(1564-1642)

U to vrijeme se vode značajne filozofske i znanstvene rasprave, tako da je svaki govornik predstavljao nekog mecenu. **Galileo Galilei** kao predstavnik Medicija nije imao nikakvo formalno obrazovanje, titulu, na što su se mnogi pozivali. Bio je samouk. Međutim, upravo to ga je nagnulo da napravi jednu od najvećih intelektualnih revolucija ikad u znanosti. Kako bi pokazao da on najbolje poznaje filozofiju prirode uvodi **matematički i eksperimentalni** opis prirode.

Smatra se da je upravo **Galileo Galilei** začetnik moderne **fizike**. Njegovi radovi su bili epohalni kao ishodište u brojnim fizikalnim zakonitostima, dajući velik doprinos daljnjeg razvoja fizikalnih zakonitosti kao što su: kinetika, gravitacija, astronomija, teleskop, teorija relativnosti, za koju u inercijskim sustavima vrijedi **Galileovo** načelo relativnosti.

**Galileo Galilei** uočava da **svjetlost** ima konačnu brzinu. Ako svjetlost ima konačnu brzinu, onda se ona eksperimentalno može odrediti. Potaknut tom idejom radi eksperiment u kojem na dva udaljena brda pušta **svjetlost** iz fenjera, te po brojanju otkucaja vlastitog bila svog srca mjeri vrijeme potrebno da **svjetlost** dođe od jednog brda do drugog, uz poznatu udaljenost između dva brda. Zbog nedostatka razvijenosti potrebne eksperimentalne tehnologije tog doba, takvim pothvatom ne uspijeva izmjeriti brzinu **svjetlosti**.

Tek nekoliko stoljeća kasnije **Galileovu** ideju realiziraju **Michelson** i **Morley** sofisticiranom eksperimentalnom tehnologijom. Eksperimentom je dokazano kako je brzina širenja **svjetlosti** konstantna, iznosa  $c \approx 2,99793 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , što je ujedno i brzina širenja svih elektromagnetskih valova kroz vakuum. Tom brzinom je definirana temeljna konstanta prirode.

Sljedeću epohalnu intelektualnu ekspanziju u razvoju spoznaje o **svjetlosti** radi **Newton** (1642-1727) eksperimentom u kojem snop bijele **svjetlosti** uspijeva propustiti kroz staklenu prizmu, u kojoj se dogodi rasap bijele **svjetlosti** na spektar svjetlosnih boja (takozvane dugine boje). On pomoću druge prizme zatim uspijeva taj rasap **svjetlosti** ponovno sastaviti u bijelu **svjetlost**. Time je dokazao da se bijela **svjetlost** sastoji od drugih svjetlosnih boja. Kad bijela **svjetlost** padne na neki predmet, on apsorbira sve boje osim jedne koju reflektira, mi taj predmet upravo vidimo tom reflektiranom bojom **svjetlosti**. Jedino crna tijela upijaju sve boje **svjetlosti**.



Na spoznajama da se bijela **svjetlost** širi konačnom brzinom, te da se može rastaviti na svjetlosne boje i ponovo sastaviti u bijelu **svjetlost**, temelji se daljnji razvoj znanosti o svjetlosti. Postavlja se fundamentalno pitanje: Na koji se način svjetlost širi kroz prostor? Postojale su dvije velike, međusobno suprotstavljene skupine znanstvenika, od kojih je jedna skupina, čiji je najistaknutiji član bio **Newton**, tvrdila da se svjetlost širi u obliku čestica, dok je druga skupina, čiji je najistaknutiji član bio **Christiaan Huygens** (1629-1695), tvrdila da se **svjetlost** širi kao val.

**Huygens** definira princip u kojemu se svaka točka homogenog prostora kojim prolazi **svjetlost** može smatrati kao novi izvor elementarnog vala svjetlosti. To vodi k mogućnosti ogiba svjetlosti, što je karakteristika valova. Ova mogućnost je eksperimentalno potvrđena za **svjetlost**.

Prihvatljivu teoriju **valnog** širenja **svjetlosti** eksperimentalnim radom daje **Thomas Young** (1773-1829). Ova teorija međutim nije i konačna – sve do pojave **fotoelektričnog efekta**. Kroz dvije uske pukotine **Young** uspijeva dobiti dva koherentna izvora svjetlosti koji na udaljenom zastoru daju interferencijske pruge, što je karakteristika valova.

Primjerom interferencije na intuitivno jasnim mehaničkim valovima može se napraviti analogija sa interferencijom na apstraktnim svjetlosnim valovima. Ako na primjer na mirnu površinu vode bacimo dva kamenčića, nastanu dva izvora valova koji se šire na površini vode. Tamo gdje se brijeg jednoga vala poklopi sa brijegom drugog nastaje povećani pomak. Tamo gdje se brijeg jednoga vala poklopi sa dolom drugog vala pomak iščezava. Ovaj fenomen je interferencijska karakteristika valova, koju ima i **svjetlost**.

Kako se eksperimentalno pokazalo da je **svjetlost** val, još je preostalo utvrditi kakve je fundamentalne vrste taj val. Naime, postoje dvije fundamentalne vrste valova: **longitudinalni** val, u kojem se titranje vala odvija u smjeru širenja vala, i **transverzalni** val, u kojemu se titranje vala odvija okomito na smjer širenja vala.

Fundamentalna vrsta vala može se odrediti eksperimentalnom tehnikom **polarizacije** valova. Postoji više različitih tehnika polarizacije. Ovaj rad se bavi teorijskom i eksperimentalnom tehnikom **polarizacije elektromagnetskih valova (svjetlosti)- tehnikom refleksije**.

Tehnika polarizacije elektromagnetskih valova (**svjetlosti**) refleksijom povijesno je otkrivena na jako zanimljiv način. Naime, danski liječnik **Erasmus Bartholinus** (1669) donosi sa

Islanda jednu vrstu kristala za koju kaže da je jedno od najvećih čuda koje je stvorila priroda. Radi se o jednoj vrsti kristala znanom kao *islandski dvolomac*. Kad se gleda kroz ovaj kristal on daje dvostruku sliku predmeta. Obični prozirni kristali (npr. staklo), kad se gleda kroz njih, daju jednu sliku predmeta. **Erasmus** smatra da je došao do fundamentalnog problema o lomu **svjetlosti** kroz *islandski dvolomac*. **Huygens** prvi pretpostavlja da se u dvolomcu radi o polarizaciji valova **svjetlosti**.

Pariška akademija znanosti 1808. godine raspisuje nagradu za najbolje objašnjenje fenomena dvostruke slike predmeta u dvolomcu. Potaknut tom nagradom, **Malus** radi niz eksperimenata sa dvolomcem. Provodeći tako dugo vremena proučavajući dvolomac, slučajno se dogodilo da ga je u jednom trenutku usmjerio prema svjetlosnoj zraci reflektiranoj od prozora jedne palače. Na veliko iznenađenje u dvolomcu se ovaj put pojavila samo jedna zraka (odnosno jedna slika predmeta).

Kut kod kojeg se u dvolomcu pojavljuje samo jedna zraka eksperimentalno je odredio škotski teolog i fizičar **David Brewster** (1781-1868). Eksperimentalno je utvrdio kut, pod kojim je potrebno da **svjetlost** upadne u prozirno dielektrično sredstvo, kako bi reflektirani dio **svjetlosti** koju je **Malus** vidio u dvolomcu bio potpuno linearno polariziran.

Kasnije je utvrđeno da se nepolarizirana svjetlost može rastaviti na dvije komponente električnog polja: okomitu i paralelnu. Kad takva svjetlost prođe kroz dvolomac, unutar kojega postoje dva dijela s različitim indeksima loma, dio sa jednim indeksom loma djeluje na okomitu komponentu električnog polja, dajući mu jednu vrstu loma, dok dio sa drugim indeksom loma djeluje na paralelnu komponentu električnog polja, dajući mu drugu vrstu loma. Tako u dvolomcu postoje dva polarizirana vala svjetlosti. **Malus** je gledajući reflektiranu zraku pri **Brewsterom** kutu dobio samo jedan polarizirani val **svjetlosti**.

Teorijsko objašnjenje eksperimentalnog određivanja stupnja polarizacije **Brewsterovog** kuta dobiva se složenim jednadžbama koje je izveo **Augustin Fresnel** (1788-1827). Opravdanost tog fizikalnog izvoda leži u **Maxwellovim** jednadžbama, koje povezuju električno polje **E** i magnetsko polje **B**.

Budući da su se u svim dotadašnjim eksperimentima pokazivala valna svojstva **svjetlosti**, valna svojstva svjetlosti bila su općeprihvaćena. No, zatim je uslijedio veliki šok sa pojavom **fotoelektričnog** efekta, kod kojega se svjetlost ponaša kao roj čestica, a ne kao val. Teorijsko

objašnjenje ovoga efekta daje **Albert Einstein** (1879-1995), na temelju **Planckovog** (1858-1947) eksperimentalnog rada zračenja crnog tijela. **Einstein** uvodi ideju svjetlosti kao roja čestica koje kasnije dobivaju ime **fotoni**. Ova ideja je, zajedno sa Planckovom idejom kvantizacije energije, bila temelj **kvantne fizike**.

**Svjetlost je dakle dualne prirode** – može imati svojstva i vala i čestice!

## 2. Matematički opis titranja i valova

Kod elektromagnetskih valova titraju električna i magnetska polja, dok kod mehaničkih valova titraju materijalne čestice, stoga su čovjeku puno intuitivno jasniji od elektromagnetskih. Naprosto čovjek koristi elektromagnetske valove kako bi vidio mehaničke valove. Svjetlost od izvora putuje do mehaničkog vala od kojeg se reflektira, a čovjek svojim okom uhvati tu reflektiranu svjetlost. Putem svog mozga može vizualizirati mehanički val. To je posljedica biološke evolucije u kojoj osoba uspijeva iskoristiti elektromagnetske valove svjetlosti u svakodnevnom životu. Međutim, takva jednostavna detekcija i vizualizacija elektromagnetskih valova nije moguća. Elektromagnetski val se širi velikom brzinom, može proći kroz tkivo čovjeka ili se reflektirati od njega. Kako bismo se uvjerali u valna svojstva elektromagnetskog vala moramo napraviti niz valjanih fizikalnih eksperimenata. Jedan od takvih eksperimenata je određivanje stupnja polarizacije **Brewsterovog** kuta.

Kako bismo bolje razumjeli titranje elektromagnetskih valova možemo ga usporediti s intuitivno razumljivijim titranjem.

Pogledajmo jednostavne idealizirane primjere harmonijskog titranja.

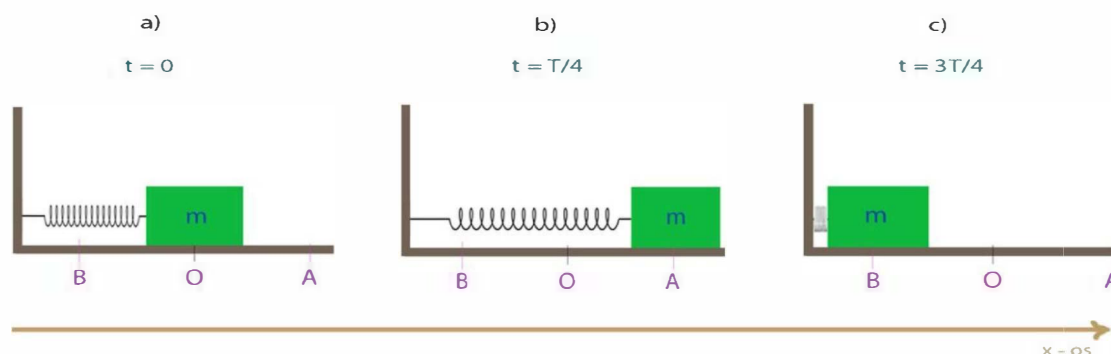
### 2.1. Harmonijski oscilator

Uzmimo idealizirani primjer harmonijskog oscilatornog titranja kojem zanemarimo sve oblike trenja. Neka se uteg mase **m** nalazi na horizontalnoj vodoravnoj podlozi tako da su sila teža i sila podloge na masu **m** istog iznosa a suprotnog smjera. Utég je privezan jednim krajem na

elastičnu oprugu konstante elastičnosti  $k$ , a drugi kraj opruge je privezan na čvrsti kraj [slika (1. a.)]. Tad silom  $F$  paralelno na položenu oprugu povucimo masu  $m$  do točke  $A$ . U toj točki djeluje sila  $F$  usmjerena u pozitivnom smjeru te elastična sila  $k$  usmjerena u negativnom smjeru [slika (2.a.)], pri čemu je  $s$  putu od  $O$  do  $A$ .

Ako u položaju  $A$  otpustimo masu  $m$ , na nju ukupno djeluje sila  $-ks$ , koja jednoliko privlači masu  $m$  natrag do točke  $O$ . Kad masa stigne u točku  $O$  ima neku brzinu, a time i kinetičku energiju.

Slika 1.(a,b,c)



Zbog inercije masa  $m$  nastavlja gibanje prema točki  $B$  u smjeru položene opruge, međutim ovaj put masa ne rasteže oprugu nego ju zbija. Time je elastična sila opet usmjerena u suprotnom smjeru od gibanja mase. Elastična sila djeluje prema točki  $O$ , koju nazivamo ravnotežni položaj. Pod utjecajem inercije mase  $m$  i elastične sile prema ravnotežnom položaju postepeno se smanjiva brzina time i kinetička energija. Smanjivanjem kinetičke energije raste drugi oblik energije jer vrijedi zakon očuvanja energije. Tom postepenom pretvorbom kinetičke energije od točke  $O$  do točke  $B$ , povećava se elastična potencijalna energija. Kad ona postane maksimalna u  $B$  kinetička energija iščezava, i tada zbog elastične sile usmjerene prema ravnotežnom položaju  $O$  dolazi do povrata mase  $m$  iz položaja  $B$  u  $O$  time i pretvorbe elastične energije u kinetičku. Nakon toga se proces nastavlja od  $O$  do  $A$  i natrag.

Takvo gibanje tijela po pravcu oko ravnotežnog položaja nazivamo titranje. Možemo ga usporediti s gibanjem tijela po kružnici kod kojeg jedan okret po kružnici predstavlja jedan period  $T[s]$ . Kod prethodnog primjera titranja po pravcu jedan period traje od početne točke **A** prema **O** do **B** i natrag kroz **O** do **A**.

Maksimalne otklone od ravnotežnog položaja nazivamo amplitudama ( točke **A** i **B** ). Broj titraja u jednoj sekundi je frekvencija:  $f = \frac{1}{T}$  (1)

Jednadžbu kako će se tijelo gibati po tom pravcu titranja dobijemo iz drugog Newtonovog zakona.

$$ma = F \quad (2)$$

U prethodnom idealiziranom primjeru bez trenja imali smo ukupnu silu na tijelo  $F = -ks$ , ako

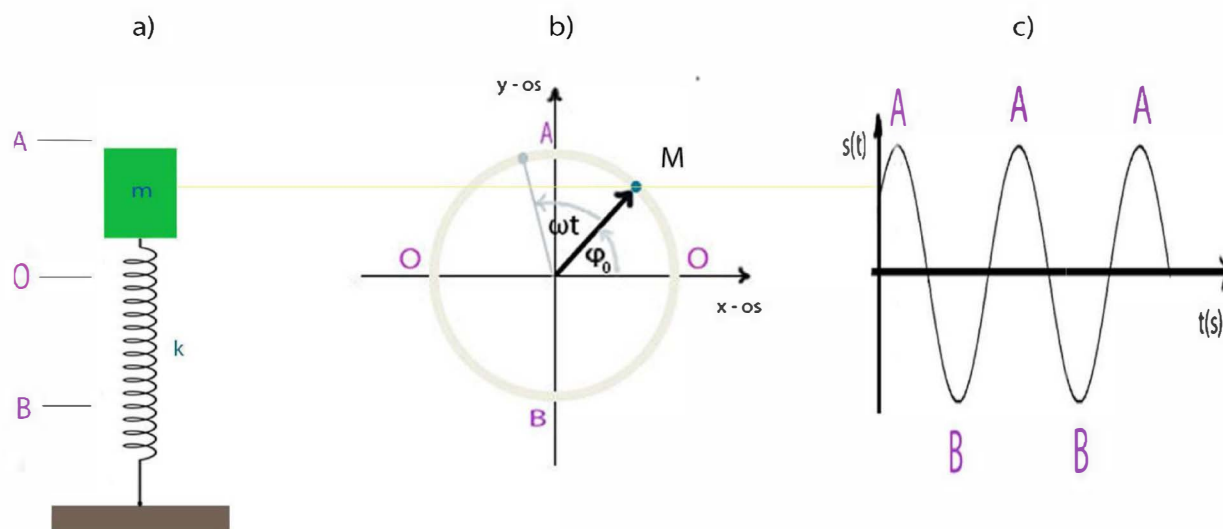
je  $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ , slijedi:  $m \frac{d^2s}{dt^2} = -ks$  (3)

Od kuda slijedi  $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0$  (4)

Dobivena je homogena diferencijalna jednadžba drugog reda za **harmonijski oscilator**.

Rješenje ove jednadžbe je elongacija  $s(t)$  mase **m** (pomak na pravcu titranja u vremenu **t**). Matematički izvod tog rješenja možemo dobiti usporedbom titranja s rotirajućim vektorom. Kao primjer uzmimo interval u kojem se masa **m** giba od položaja **O** prema **A**. Na polovini te udaljenosti vršimo mjerenje eksperimenta [**Slika 2.a**]. Rotirajući vektor **B** se nalazi položen na površini **x-y** Kartezijevog koordinatnog sustava, a ishodište vektora se podudara s ishodištem sustava [**Slika 2.b**]. Vektor **B** rotira oko osi **z**. Na vrhu tog vektora se nalazi točka **M** koja prati titranje mase **m**. U trenutku mjerenja  $t=0$  masa **m** se nalazi na jednoj četvrtini puta od **O** do **A**, i tada rotirajući vektor napravi otklon od osi **x** za  $45^\circ$ . Pustimo li horizontalnu zraku iz mase **m** ona tokom titranja prolazi točkom **M**. Pomoću te zrake možemo nacrtati graf pomaka **s** u vremenu **t** mase **m**, [**Slika 2.c**].

**Slika 2.**(a,b,c)



Neka vektor  $\mathbf{B}$  rotira oko osi  $z$ . Tako da se točka  $\mathbf{M}$  giba po kružnici stalnom kutnom brzinom  $\omega$ . Tada bismo matematički mogli usporediti harmonijsko titranje s jednolikim gibanjem po kružnici. Projekcija vektora  $\mathbf{B}$  na os  $x$  i  $y$  [Slika 2.(b)].

Za naš početni trenutak ( $t=0$ ) mjerenja, dana je s:

$$\text{os- } x = B \cos(\varphi_0) \quad (5)$$

$$\text{os- } y = B \sin(\varphi_0) \quad (6)$$

Ako vektor nastavi rotirati od svog početnog položaja  $\varphi_0$  ( $t=0$ ) do nekog općenitog vremenskog trenutka  $t$ , tad se on otklonio za dodatni kut  $\omega t$ , pri čemu je  $\omega$  promjena kuta u vremenu  $d\varphi/dt$ ; kutna brzina [rad/s]. Kad vektor  $\mathbf{B}$  napravi puni okret oko osi  $z$ , tad masa  $m$  napravi jedan titrajni period  $T$ . Za to vrijeme točka  $M$  napravi puni okret što nam daje kut otklona od  $2\pi$ . Ako usporedimo frekvenciju titranja  $f = \frac{1}{T}$  mase  $m$  s kutnom brzinom  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  za isti period  $T$ , slijedi  $\omega = 2\pi f$  (7). Tad frekvenciju titranja mase  $m$  možemo matematički opisati pomoću izraza za kutnu brzinu, iako titranje mase  $m$  ne radi kružno gibanje.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (8)$$

Možemo napisati općeniti izraz projekcije vektora **B** na osi **x** i **y** tako da u jednažbama (5) i (6) proširimo početni otklon kuta  $\varphi_0(t=0)$  za dodatni otklon kuta  $\omega t(t=t)$ , pa je  $\varphi(t=t, t=0) = \omega t + \varphi_0$ , te

$$x = B \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9)$$

$$y = B \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (10)$$

Ako pogledamo tijekom kružnog gibanja projekciju točke **M** na os **y** danu jednažbom (10), tad ta projekcija u potpunosti prati titranje mase **m** na pravcu. Ako je dužina vektora **B** od ishodišta do točke **M** jednakog iznosa dužini od **O** do **B** [slika 2], tad ta dužina predstavlja maksimalni otklon mase **m** od ravnotežnog položaja. Time izraz  $y = B \sin(\omega t + \varphi_0)$  (10) odgovara rješenju (4) za pomak titranja mase **m** po pravcu u vremenu **t**. Možemo reći da je elongacija **s(t)** pomak mase **m** tijekom titranja po pravcu jednaka  $s(t) = y = B \sin(\omega t + \varphi_0)$  te ju uvrstimo u pripadnu jednažbu gibanja za harmonijski oscilator:

$$\frac{d^2}{dt^2} (B \sin(\omega t + \varphi_0)) + \frac{k}{m} B \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$- B \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} B \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Slijedi da  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ . Korjenovanjem dalje dobijemo  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ista je veličina koju zovemo kružna frekvencija.

Možemo vidjeti kako kružna frekvencija ovisi samo o konstanti elastičnosti opruge i masi koja titra, tj. samo o građi harmonijskog oscilatora ne i o amplitudi.

Kod rotirajućeg vektora  $\varphi_0$  predstavlja početni otklon kuta od osi **x**, a kod titranja mase **m** predstavlja nam početni otklon od ravnotežnog položaja i zove se faza titranja.

Ako želimo riješiti (4) bez analogije, moramo znati kako riješiti diferencijalnu jednažbu.

**Definicija (linearne diferencijalne jednažbe):** linearna diferencijalna jednažba je kod koje se  $y^{(x)}$  i njene derivacije u **F** pojavljuju samo linearno. Ima oblik

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \sum_{i=0}^n b_i(x) y^{(i)}(x) - f(x) = 0 \quad (11)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^n b_i(x) y^{(i)}(x) \quad (12)$$

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  je diferencijalna jednačina  $n$ -tog reda,

Ako je  $f(x) = 0$  onda je homogena linearna jednačina

Ako je  $f(x) \neq 0$  onda je nehomogena linearna jednačina

Razlika diferencijalne jednačine u odnosu na algebarsku je ta što kod diferencijalne jednačine tražimo funkcije a ne brojeve.

Općenito se diferencijalne jednačine rješavaju matematičkim metodama fizike. Jedna od tih metoda je upotreba kompleksnih brojeva. Tako se prethodni primjer diferencijalne jednačine (4) za harmonijski oscilator može riješiti pretvorbom Kartezijevog koordinatnog sustava [Slika (2.b)] u Gaussov koordinatni sustav [Slika 3.]. Time je točka M zapravo točka  $z = x + iy$  kompleksne ravnine koja ima projekciju na imaginarnu i realnu os, kao što je točka M rotirajućeg vektora imala projekciju na x-y os.

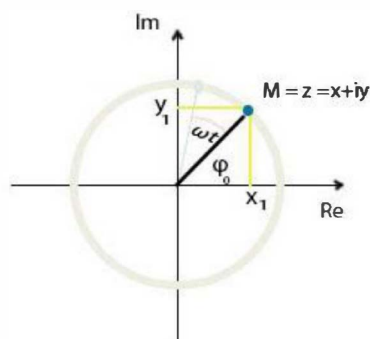
Tad kompleksni broj  $z = x + iy$  možemo prikazati u polarnim koordinatama

$$z = |z| e^{i\varphi} \quad (13)$$

Vrijedi Eulerova formula  $e^{i\varphi_0} = \cos(\varphi_0) + i \sin(\varphi_0)$  (14)

$$z = r ( \cos(\varphi_0) + i \sin(\varphi_0) ), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad (15)$$

**Slika 3.**





Čisto matematičkoj formi kompleksne ravnine treba dati fizikalni smisao. Zamislimo da točka  $M = z = x + iy$  rotira oko ishodišta. Tako da se udaljenost ishodišta do točke  $M$  ne mijenja. Za fizikalni smisao trebalo bi zamisliti da se ta rotacija odvija u vremenu. Tad bi se kut otklona spojnice  $r$  od realne osi mijenjao u vremenu  $d\varphi/dt$  što je kutna brzina  $\omega$ . Ako je početni otklon bio  $\varphi_0$  tada je otklon u nekom vremenskom trenutku  $t$ ,  $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ . To možemo uvrstiti u matematički izraz (13) pa dobivamo

$$\mathbf{z}(t) = |z| e^{i\varphi(t)} = z = |z| e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad (16)$$

Neka nam rotacija točke  $M$  oko ishodišta prati titranje mase  $m$  sa [Slike 1.] tako da jedan period titranja mase  $m$  odgovara jednom periodu punog okreta točke  $M$  oko ishodišta. Za fizikalnu usporedbu s titranjem neka nam je izraz u (16) za udaljenost ishodišta do točke  $M$  jednak maksimalnom otklonu mase titranja od ravnotežnog položaja  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = B$ .

Sada pogledajmo homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda koju smo dobili

ranije :  $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0 \quad (4).$

Pretpostavimo da je rješenje te jednadžbe  $s(t)$  oblika

$$s(t) = \mathbf{z}(t) = |z| e^{i(\omega t + \varphi_0)} = B e^{i(\omega t + \varphi_0)} = B(\cos(\omega t + \varphi_0) + i \sin(\omega t + \varphi_0)) \quad (17)$$

deriviramo  $\frac{d}{dt} s(t) = i\omega B e^{i(\omega t + \varphi_0)}, \quad \frac{d^2}{dt^2} s(t) = -\omega^2 B e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad (18)$

uvrstimo to u (4) i slijedi da je

$$-\omega^2 B e^{i(\omega t + \varphi_0)} + \frac{k}{m} B e^{i(\omega t + \varphi_0)} = 0 \quad (19)$$

Može pisat  $(-\omega^2 + \frac{k}{m}) e^{i(\omega t + \varphi_0)} = 0 \quad (20)$

Jednadžba (20) je zadovoljena ako i samo ako je  $(-\omega^2 + \frac{k}{m}) = 0$ , od kud dobivamo:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (21)$$

Definicija linearne diferencijalne jednadžbe kaže da je rješenje oblika funkcije, koju smo dobili kao  $s(t)$ , kružna frekvencija u toj funkciji  $\omega$  dana je izrazom (21). Ta je funkcija u ovom slučaju kompleksna, dok je titranje fizikalnog harmonijskog oscilatora opisano realnom

funkcijom. Možemo odabrati jedno od dva rješenja  $B(\cos(\omega t + \varphi_0) + i \sin(\omega t + \varphi_0))$  realni dio ili imaginarni, pomoću kojeg možemo nacrtati graf titranja  $s$ - $t$  harmonijskog oscilatora.

Zbog ekvivalentnosti rješenje može biti  $s(t) = B(\cos(\omega t + \varphi_0))$  ili  $s(t) = B \sin(\omega t + \varphi_0)$  pa kao dva zasebna rješenja imamo dvije realne funkcije.

Fenomen titranje se odvija ponavljanjem položaja tijela u istim vremenskim intervalima  $T$ , koje zovemo period. Stoga je funkcija  $s(t)$  periodička pa vrijedi

$$s(t + T) = s(t) \rightarrow B \sin(\omega(t + T) + \varphi_0) = B \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (22)$$

### Energija titranja

Ukupna energija titranja je sačuvana. Ako uzmemo prethodni idealizirani primjer onda je ukupna energija zbroj potencijalne elastične i kinetičke energije  $E = E_{kin} + E_{pot} = \text{konst.}$

Elongacija je:  $s(t) = B \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

Brzina je derivacija elongacije po vremenu

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = B \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (23)$$

Kinetička energija dobije se kad uvrstimo (23) i (21):

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m B^2 \omega^2 (\cos(\omega t + \varphi_0))^2 = \frac{k B^2}{2} (\cos(\omega t + \varphi_0))^2 \quad (24)$$

Uzmimo u obzir trigonometrijski izraz:  $(\cos(\omega t + \varphi_0))^2 = 1 - (\sin(\omega t + \varphi_0))^2$  (25)

Tada je kinetička energija

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} k (B^2 - [s(t)]^2) \quad (26)$$

Maksimalna potencijalna energija sustava jednaka je radu koji smo izvršili kako bismo masu privezanu za oprugu otklonili iz ravnotežnog položaja od  $O$  do točke  $B$ . Mi smo vršili rad protiv elastične sile, pa je predznak za rad negativan. Silu egzaktno možemo odrediti iz elastičnih svojstva i pomaka istezanja kao  $F_{elast.} = -ks$ . Rad je umnožak te sile na putu pomaka  $s(t)$ .

$$E_{pot} = -W = -\int_0^{s(t)} F_{elast.} ds(t) = \int_0^s (-ks(t)) ds(t) = \frac{1}{2} k(s(t))^2 \quad (27)$$

pa je ukupna energija titranja dana s:

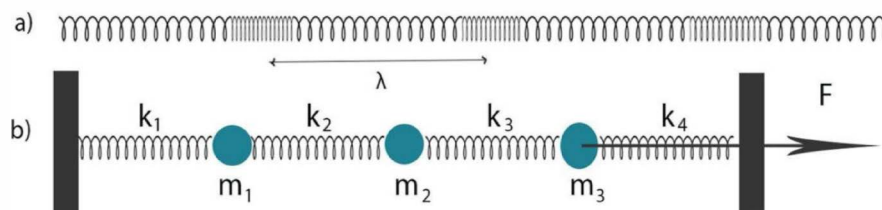
$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}k (B^2 - s(t)^2) + \frac{1}{2} k(s(t))^2 = \frac{1}{2}kB^2 = \text{konst.} \quad (28)$$

Ako usporedimo rezultat ove jednadžbe s rezultatom koji smo dobili za kružnu frekvenciju, možemo vidjeti kako kružna frekvencija titranja ne ovisi o amplitudi kojom masa  $m$  titra, dok ukupna energija titranja kvadratno ovisi o amplitudi.

### Sažetak harmonijskog titranja i komentar

Mehanički val je poremećaj sredstva koji se širi nekom brzinom, a pri tom širenju prenosi se energija. Elastični oscilatori sredstva zatitraju oko ravnotežnog položaja kad puls dođe do njih, oni se ne prenose kroz sredstvo. Kod longitudinalnog vala oscilatori sredstva titraju u smjeru širenja vala. Time se dobiju gušći i rjeđi dijelovi sredstva [Slika4.(a)]. Udaljenost dva uzastopna gušća ili rjeđa dijela daje valnu duljinu  $\lambda$ . Brzina kojom se val širi dana je s  $v = \lambda/T = \lambda f$ , pri čemu su  $T$  = vremenski period titranja;  $\lambda$  = geometrijski period titranja.

Slika4.(a,b)



U prethodnom smo primjeru imali jedno elastično sredstvo povezano masom koja oscilira. Mogli bismo napraviti puno složenijih kombinacija titranja, koja pokazuje više različitih npr. [Slika4 (b)], elastičnih sredstava povezanih različitim masama. Ako bismo jednu masu takvog sustava otklonili iz ravnotežnog položaja silom  $F$  (u smjeru položenih opruga elastičnog sredstva), tad bismo otpuštanjem te sile izvan ravnotežnog položaja dobili složenije titranje. Matematičke uvjete tog titranja možemo dobiti slično kao i za prethodni slučaj. Postavljanjem

drugog Newtonovog zakona ovakvog sistema, dobili bismo jednadžbu gibanja u nekom diferencijalnom obliku, čije se rješenje može dobiti matematičkim metodama fizike. Ovakvi sustavi imaju složeniji način titranja kod kojih se može desiti da različite mase titraju različitim frekvencijama. Time bi se amplituda titranja mogla mijenjati u vremenu, pa takvo titranje ne bi bilo harmonijsko.

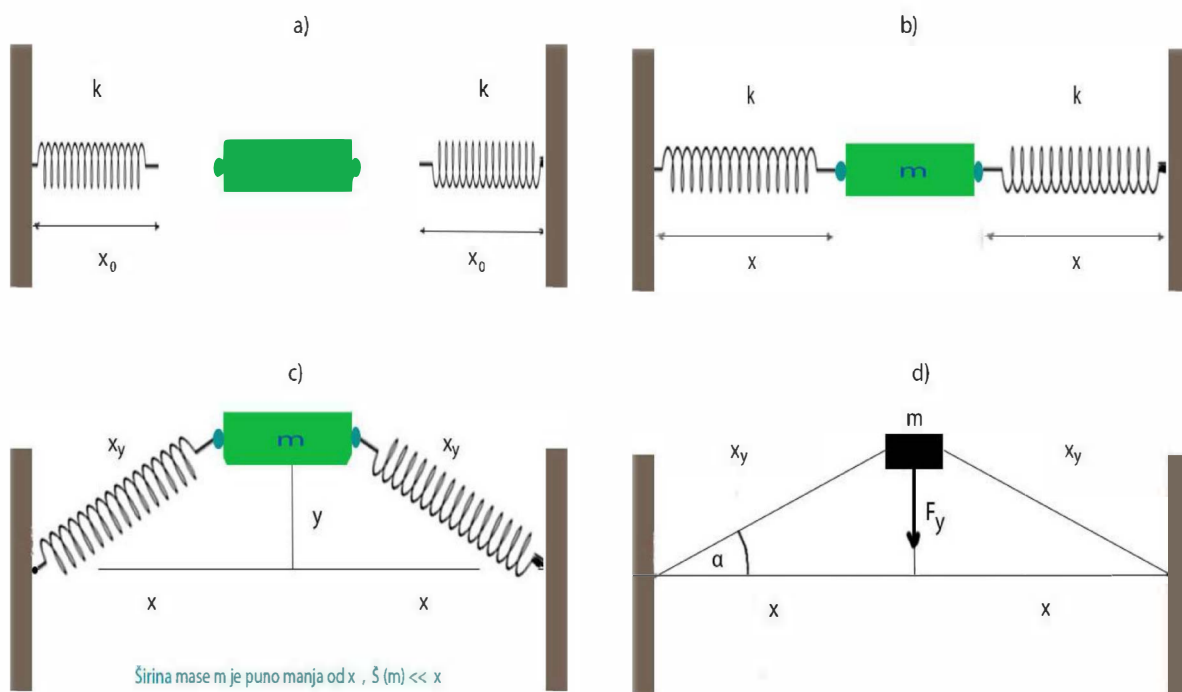
Prethodni primjeri longitudinalnog titranja se odvijaju u jednoj prostornoj dimenziji. Mogli bismo isto izvesti titranja u dvije ili tri prostorne dimenzije. Samo bismo umjesto jedne prostorne dimenzije  $s$  ili  $x$  morali uzeti u obzir i druge dvije prostorne dimenzije,  $y$  i  $z$ .

### 2.1.1. Harmonijski transverzalni oscilator

Kod transverzalnih mehaničkih valova čestice sredstva titraju okomito na smjer širenja vala. Kad poremećaj sredstva stigne do neke čestice sredstva on ju zatitra oko ravnotežnog položaja. Ako su čestice međusobno vezane nekom silom tad se titranje prenosi s jedne čestice na drugu, a time se energija poremećaja prenosi u obliku transverzalnog vala. Čestice sredstva se ne prenose, već samo titraju. Takav val ima uzdignute dijelove sredstva koje zovemo brjegov i dolke, spuštene dijelove sredstva zovemo dolovi. Dva uzastopna brjega ili dolka čine valnu duljinu  $\lambda$ . Kako se titranje prenosi s jedne čestice na drugu, vrijeme potrebno da dvije čestice krenu titrat istom fazom zove se period titranja  $T$ . Brzina kojom se val širi dana s  $v = \lambda/T = \lambda f$ , pri čemu su  $T$  = vremenski period titranja, i  $\lambda$  = geometrijski period titranja.

Pogledajmo primjer jedne čestice koja titra okomito na elastično sredstvo, to jest položenu oprugu [Slika 5.] Eksperimentalni postav [Slike 5(a)] sastoji se od dvije položene nerastegnute opruge duljine  $x_0$  konstante elastičnosti  $k$ , te čestice mase  $m$ . Svaka od tih opruga jednim je krajem privezana za čvrstu podlogu dok je drugi kraj slobodan. Masu  $m$  privežimo za dva slobodna kraja opruga [Slike 5(b)]. Neka  $x$  predstavlja dužinu rastegnute opruge u ravnotežnom položaju. Otklonimo masu  $m$  silom  $F$  okomito na položene opruge [Slike 5(c)]. Neka  $y$  predstavlja otklon od ravnotežnog položaja a  $x_y$  duljinu opruge u tom položaju. Ako otpustimo masu  $m$ , sistem titra oko ravnotežnog položaja okomito na položene opruge [Slike 5(a)].

Slika5.(a,b,c,d)



[Slika5.(d)] predstavlja par sila ( $F_{lj}$ ,  $F_{de}$ ) koje djeluju na masu  $m$  kad smo pustili masu  $m$  u položaju  $y$ .

$$F_{lj} = F_{de} = -k (x_y - x_0) \quad (29)$$

Tada u smjeru osi  $y$  na masu  $m$  djeluje ukupna rezultanta sila  $F_y$ .

$$F_y = -2k (x_y - x_0) \sin(\alpha) = -2k (x_y - x_0) \frac{y}{x_y} \quad (30)$$

Slijedi:

$$F_y = -2ky \left(1 - \frac{x_0}{x_y}\right) \quad (31)$$

Tad iz Pitagorinog poučka za [Sliku5.(b,d)] vidimo da je  $x_y = \sqrt{y^2 + x^2}$  (32)

Uvrstimo to u gornji izraz za silu:

$$F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2k \left( 1 - \frac{x_0}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right) y \quad (33)$$

Podijelimo izraz (33) s masom **m**, prebacivanjem desne strane izraza na lijevu dobivamo

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{m} y - \frac{2kx_0}{m\sqrt{y^2 + x^2}} y = 0 \quad (34)$$

Ako usporedimo ovu diferencijalnu jednadžbu s linearnom diferencijalnom jednadžbom (4) koja opisuje harmonijsko titranje, vidimo da izraz (34) nema linearni oblik zbog člana  $y^2$  ispod korijena, pa takvo titranje nije harmonijsko. To je stoga što sila  $F_y$  koja uzrokuje titranje mase **m** na osi **y** nije linearna (33).

Ako pogledamo malo bolje izraz (34) vidimo da bismo uklanjanjem člana  $y^2$  dobili linearnu diferencijalnu jednadžbu sličnu izrazu (4) za harmonijsko titranje. Takvo uklanjanje člana iz jednadžbe možemo napraviti aproksimacijom, u kojoj i dalje moraju vrijediti fizikalni zakoni. To se može napraviti na dva načina:

- 1.) Fizikalno zahtijevamo jako male otklone mase **m** u smjeru osi **y** ili postavimo jako dugačke opruge u položaju ravnoteže. Tada je duljina opruga **x** u položaju ravnoteže puno veća od pomaka **y**,  $x \gg y$ .  
Tad  $x^2$  dominira pod korijenom u jednadžbi (34) pa možemo zanemariti član  $y^2$  koji ima mali utjecaj. dobivamo

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{m} y - \frac{2kx_0}{m\sqrt{x^2}} y = \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{m} \left( 1 - \frac{x_0}{x} \right) y = 0 \quad (35)$$

Usporedbom diferencijalnih jednadžbi (34) i (4) dobivamo da je kružna frekvencija za ovaj

slučaj titranja jednaka

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m} \left( 1 - \frac{x_0}{x} \right)} \quad (36).$$

(Općenito je generalni oblik za diferencijalnu jednadžbu jednostavnog harmonijskog titranja

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega_0^2 \psi = 0 \quad (37)$$

2.) Drugi način aproksimiranja je kad bismo slobodne nerastegnute opruge duljine  $x_0$  jako rastegnuli do duljine  $x$  ravnotežnog položaja, to jest kad bi duljina rastegnute opruge  $x$  bila jako velika u odnosu na rastegnutu oprugu  $x_0$ . Tad bi vrijedilo  $x_0 \ll x$ , odnosno  $\frac{x_0}{x} \ll 1$ . usporedimo li taj odnos s trećim članom u izrazu (34), možemo vidjeti da će nazivnik u  $\frac{x_0}{\sqrt{y^2 + x^2}}$  biti puno veći od  $x_0$ . pa time sigurno treći član u izrazu (34) teži k nuli pa možemo pisati:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2k}{m} y - \frac{2kx_0}{m\sqrt{y^2 + x^2}} y = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2k}{m} y - (\approx 0) y = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2k}{m} y = 0 \quad (38)$$

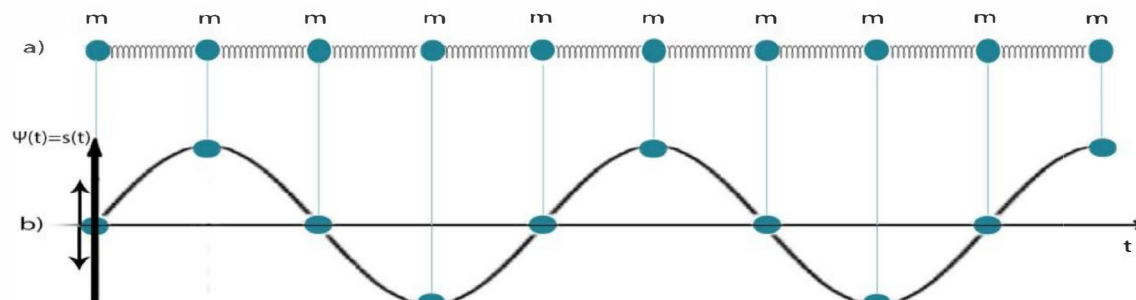
Tada usporedbom (38) s (37) dobivamo kružnu frekvenciju ovog harmonijskog titranja

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (38)$$

Usporedimo li ovaj primjer titranja s prethodno opisanim rotirajućim vektorom ili rješenjem diferencijalne jednadžbe pomoću kompleksnih brojeva, dobivamo da je elongacija pomak mase  $m$  titranja po jednoj dimenziji osi  $y$  dana s  $y(t) = B\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

Mogli bismo napraviti transversalni val ako bismo niz tako vezanih oscilatora [Slika 6(a)], zatitrali na jednom kraju koji nazivamo izvor vala. Tada bi se titranje jednog kraja oscilatora prenosilo vezanim dijelovima na druge oscilatore. Da bi takav val bio harmonijski, titranje izvora mora bit harmonijsko, opisano diferencijalnom jednadžbom  $\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi = 0$  (37), pri čemu je elongacija u smjeru  $y$ -osi  $y(t) = \psi(t) = B\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Time bi nastao harmonijski val amplitude  $B$  i valne duljine  $\lambda$ , pri čemu  $\lambda = v f$  [Slika 6(a)].

**Slika 6.(a,b)**



Zamislamo kako primjer s prethodne slike ima velik broj masa(oscilatora) po jediničnoj duljini sustava. Tad bi duljina opruga među oscilatorima bila jako mala, pa bi se takav sustav mogao smatrati aproksimacijom kontinuirane raspodjele oscilatora. Kad bismo izveli valnu jednadžbu takve kontinuirane raspodjele oscilatora to bi nam moglo pomoći pri razumijevanju elektromagnetske valne jednadžbe, u kojoj su vektori električnog i magnetskog polja kontinuirano rasprostranjeni u valu. Primjer za kontinuiranu raspodjelu mase možemo naći u homogenoj žici. Naime u homogenoj žici imamo velik broj sitnih čestica međusobno povezanih atomskim silama, pa nam je to dobra aproksimacija kontinuuma.

### 2.1.2. Jednadžba titranja homogene žice

Neka se homogena ravna žica nalazi položena na osi  $x$  koordinatnog sustava tako da se jedan slobodni kraj žice nalazi u ishodištu  $\Psi - x$  koordinatnog sustava, dok je drugi slobodni kraj daleko na osi  $x$ . Ako je  $F$  sila kojom je žica zategnuta u položaju ravnoteže dok miruje na osi  $x$ , Tad su horizontalne sile na krajeve žice uravnotežene:  $F_1 \cos \vartheta_1 = F_2 \cos \vartheta_2 = F$ , pri čemu je  $\vartheta$  kut otklona pojedine sile od horizontalne ravnine. Zatitramo li harmonijski jedan kraj žice, dobivamo transverzalni harmonijski val [Slika7(a)]. Pogledajmo sile koje djeluju na jednom dijelu žice  $\Delta x$  [Slika7(b)]. Na krajevima djelića žice  $\Delta x$  i dalje djeluju sile napetosti



$\vec{F}$ , ali sad u transverzalnom smjeru vala. Te sile možemo rastavit i na komponente. Ako pogledamo dva kraja djelića žice  $\Delta x$  [Slika7(b)], vrijedi:

$$\vec{F} = -F \sin \vartheta'_1 \hat{\Psi} - F \cos \vartheta'_1 \hat{x} = F \sin \vartheta'_2 \hat{\Psi} + F \cos \vartheta'_2 \hat{x} \quad (39)$$

Ako bismo napravili eksperiment u kojem bi amplitude titranja žice bile jako male, tad bi se element žice malo otklonio od osi  $x$ , pa bi ukupna rezultanta sila u smjeru  $x$ -osi težila nuli.

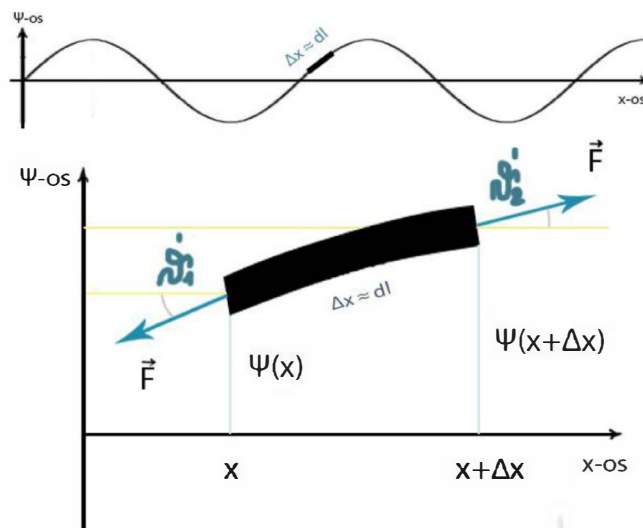
Pomoću (39) i [Slike7(b)], slijedi:

$$F_x = F \cos \vartheta'_2 - F \cos \vartheta'_1 = F(\cos \vartheta'_2 - \cos \vartheta'_1) \approx 0 \quad (40)$$

Ukupna sila koja uzrokuje gibanje djelića žice  $\Delta x$  je u smjeru osi  $\Psi$ . Uz jako male amplitude i male otklone žice ( $\Delta x \approx dl$ ) od osi  $x$ , kutovi  $\vartheta'_1$  i  $\vartheta'_2$  su jako mali. Može se aproksimirati  $\sin \vartheta \approx \tan \vartheta$ ,  $\sin \vartheta \approx \tan \vartheta$ . Ukupna rezultanta sila u smjeru  $\Psi$  osi je:

$$F_\Psi = F \sin \vartheta'_2 - F \sin \vartheta'_1 = F(\sin \vartheta'_2 - \sin \vartheta'_1) \approx F(\tan \vartheta'_2 - \tan \vartheta'_1) \quad (41)$$

Slika7.(a,b)



Možemo vidjeti da je tangens kuta  $\vartheta$ . Pomak u  $\Psi$  smjeru podijeljen s pomakom u  $x$  smjeru, pa je:

$$\tan \vartheta = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (42)$$

Koristimo parcijalnu derivaciju jer funkcija pomaka  $\Psi$  ovisi o vremenu i položaju  $\Psi(x,t)$ . Tad izraz (41) prelazi u oblik:

$$F_{\Psi} = F(\sin \vartheta'_2 - \sin \vartheta'_1) \approx F(\tan \vartheta'_2 - \tan \vartheta'_1) = F\left(\frac{\partial \Psi(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}\right) \quad (43)$$

Pokušajmo ovu jednadžbu dalje razviti do diferencijalnog oblika kakav smo imali u prethodnim primjerima. Promatranje se odvija na djeliću žice mase  $\Delta m$ :

$$F_{\Psi} = \Delta m \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial \Psi(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}\right) \quad (44)$$

Uz pretpostavku da je gustoća mase homogene žice ravnomjerno raspodijeljena duž žice, dobivamo da je linearna gustoća mase žice  $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x}$ , od kuda je  $\Delta m = \rho \Delta x$  pa je:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial \Psi(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}\right) \quad (45)$$

$$\frac{\rho}{F} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\left(\frac{\partial \Psi(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}\right)}{\Delta x} \quad (46)$$

Sad imamo jednadžbu za dio žice  $\Delta x$ , no mi želimo znat kako se pomak  $\Psi(x, t)$  ponaša u svakoj točki žice koja titra. Da bismo razmotrili kako se jednadžba ponaša u točki žice pustimo da duljina  $\Delta x$  teži u nulu, što će nam biti aproksimacija točke, kad  $\Delta x \rightarrow 0$ . Cijeli izraz s desne strane ima ovisnost o toj promjeni:

$$\frac{\rho}{F} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial \Psi(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}\right)}{\Delta x} \quad (47)$$

Ako pogledamo desnu stranu jednakosti i znamo da je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = (f(x))' = \frac{d}{dx} f(x) \quad (48),$$

Vidimo da se desna strana može zapisati kao prostorna derivacija.

možemo pisati:

$$\frac{\rho}{F} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial \Psi(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (49)$$

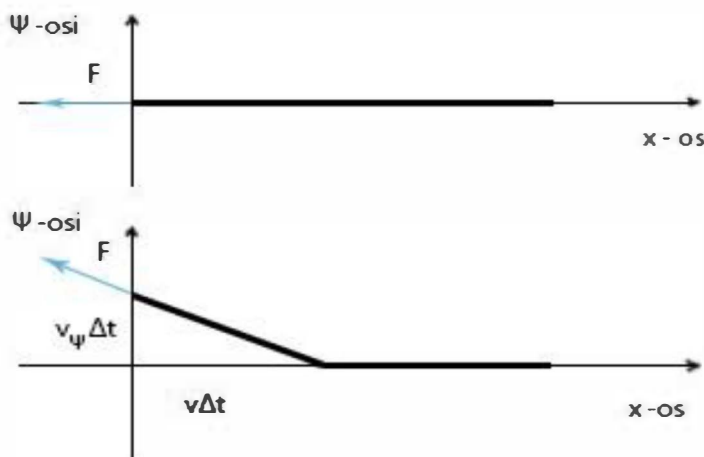
Pomnožimo sve s (-1). Nakon sređivanja izraza (49) dobivamo **jednadžbu transversalnog vala na homogenoj žici**:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{F} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (50)$$

Jednadžba ovisi o linearnoj gustoći mase žice  $\rho$  i sili napetosti  $F$ . Mogli bismo dalje istražiti kako ovisi o brzini širenja vala.

Promotrimo prethodni slučaj u početnim vremenskim trenucima. Za  $t = 0$  žica je položena duž osi  $x$  te je napeta horizontalnom silom  $F$  [Slika 8(a)]. Djelujemo li okomitom silom  $F_\Psi$  na rub žice u vremenskom intervalu  $\Delta t$ , rub se postepeno pomiče okomitim ubrzanjem. Kako su čestice žice međusobno povezane otklon se prenosi od početne čestice na susjedne čestice u nizu, i time svaka sljedeća čestica kasni u otklonu za prethodnom. Tad se zbog međusobne povezanosti čestica poremećaj širi od izvora na susjedne čestice. Iz toga dobivamo horizontalnu komponentu brzine  $v$ , što je ujedno brzina širenja transversalnog vala.

**Slika 8** (a,b)



Uz početne uvjete prethodnog primjera za titranje žice jako malim otklonima možemo aproksimirati silu na žicu horizontalnom silom. Pogledajmo matematički odnos komponenta sila i pripadajućih komponenta otklona.

$$\frac{F_{\Psi}}{F} = \frac{v_{\Psi} \Delta t}{v \Delta t} \implies F_{\Psi} = F \frac{v_{\Psi} \Delta t}{v \Delta t} = F \frac{v_{\Psi}}{v} \quad (51)$$

Okomitom silom smo djelovali u vremenu  $\Delta t$  što daje impuls sile

$$F_{\Psi} \Delta t = F \frac{v_{\Psi}}{v} \Delta t \quad (52)$$

Impuls sile jednak je promjeni količine gibanja žice u tom vremenskom intervalu  $\Delta t$ . U izrazu za promjenu količine gibanja uzimamo za masu samo onaj dio užeta koji se otklonio u tom vremenskom intervalu i brzinu  $v_{\Psi}$  transverzalnog otklona čestica.

$$\Delta p = \Delta m v_{\Psi} = (\Delta m = \rho \Delta x) v_{\Psi}, \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta x = v \Delta t \quad (53)$$

$$\Delta p = \Delta m v_{\Psi} = \rho \Delta x v_{\Psi} = \rho v \Delta t v_{\Psi} \quad (54)$$

Izjednačimo impuls sile i promjenu količine gibanja otklonjene žice  $(52) = (54)$

$$F \frac{v_{\Psi}}{v} \Delta t = \rho v \Delta t v_{\Psi} \quad (55)$$

Od kuda slijedi brzina širenja transverzalnog vala kroz žicu:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (56)$$

Uvrstimo to u valnu jednadžbu  $\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{F} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0$  (50). Dobivamo izraz ovisan o brzini širenja transverzalnog vala kroz sredstvo:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (51) \quad (1D)$$

Dobili smo valnu jednadžbu širenja transversalnog vala kroz jednu prostornu dimenziju  $x$ , i vremensku dimenziju što nam daje fizikalni smisao. Tako bismo isto mogli izvesti valnu jednadžbu za dvije dimenzije, samo bismo morali uzeti u obzir i tu drugu dimenziju. Npr. da imamo površinu u  $x$ - $y$  koordinatnom sustavu, dobili bismo izraz za jednadžbu vala koji se širi preko površine  $x$ - $y$  brzinom  $v$ .

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x,y,t)}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (52) \quad (2D)$$

te valnu jednadžbu kroz tri prostorne dimenzije

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x,y,z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (53) \quad (3D)$$

opći izraz za **širenje trodimenzionalnog vala kroz homogeno sredstvo**

$$\nabla^2 \Psi(x, y, z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (54)$$

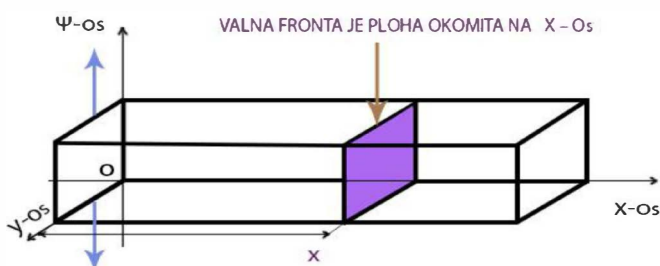
Pri čemu  $\nabla^2$  **Laplaceov** operator.

### 2.1.3. Matematički opis valnog gibanja

Mehanički val nastaje u izvoru kao poremećaj početnih čestica, od kuda se širi susjednim česticama u nizu. Mjesto do kojeg je doprelo titranje u određenom trenutku zovemo **valna fronta**. Valnu frontu možemo zamisliti kao geometrijski oblik spojenih točki vala koje titraju istom fazom u određenom vremenskom trenutku. Za val koji se širi u tri dimenzije fronta je geometrijska ploha, dok je za val u dvije dimenzije fronta krivulja. Pravac po kojem se titranje odvija od čestice do čestice zovemo **valna zraka**. Kod nastanka međusobno paralelnih zraka okomitih na valne fronte dobivamo **ravni val**. Primjer takvog vala je širenje duž samo jednog pravca ili kružni val; na velikim udaljenostima od izvora dijelove vala možemo aproksimirati ravnim valom. Matematički opis valnog gibanja dobivamo postavljanjem fizikalnih uvjeta vala, što preko jednadžbe gibanja vodi do nekog od diferencijalnih oblika valne jednadžbe. Rješenje diferencijalne valne jednadžbe je funkcija prostorno-vremenskih koordinata. Bitno je odrediti smjer kojim se val širi. Ako je smjer širenja vala duž jedne osi, tad je bez obzira radi li se o širenju kroz jednodimenzionalno sredstvo ili širenju ravnog vala kroz trodimenzionalno

sredstvo rješenje valne diferencijalne jednačbe funkcija jedne prostorne varijable i jedne vremenske  $\Psi(x,t)$ . Uzmimo kao primjer širenje ravnog vala u smjeru x osi kroz homogeno trodimenzionalno sredstvo[ **Slika 9.**]. Tad sve točke plohe valne fronte titraju jednako, pa širenje vala kroz tri dimenzije možemo usporedit sa širenjem kroz jednu dimenziju, uz uvjet da se širenje odvija u smjeru jedne od osi trodimenzionalnog sredstva. Funkciju elongacije(pomaka) širenja vala kroz jednodimenzionalno sredstvo možemo usporediti s funkcijom elongacije širenja vala kroz trodimenzionalno sredstvo, od kuda slijede dvije varijable u funkciji elongacije  $\Psi(x,t)$ .

**Slika 9.**



Uzmimo slučaj trodimenzionalnog homogenog sredstva oblika kvadra [**Slika 9.**] mirno položenog na x-y površini. Titramo li harmonijski ravninu točaka tog sredstva okomitu na x-os u smjeru  $\Psi$ -osi oko ravnotežnog položaja u ishodištu, titranje se prenosi na susjedne čestice sredstva u nizu, pa do ravnine dopire titranje predstavlja valne fronte. Elongacija pomak tih čestica u ishodištu koordinatnog sustava je:

$$\Psi(x = 0, t) = B \sin \omega t = B \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (55)$$

Pri čemu je  $\omega$  kružna frekvencija titranja, B je amplituda a T period titranja. Jednadžba (55) opisuje skup točaka čija je koordinata  $x = 0$ , a koje titraju harmonijski oko ravnotežnog položaja u ishodištu. Kako su čestice sredstva međusobno povezane titranje se prenosi duž sredstva u smjeru x-osi, pa će val od ishodišta doprijeti za vrijeme  $t_{x_B}$  do neke koordinate  $x_B$  tog sredstva, pa je:

$$t_{x_B} = \frac{x_B}{v} \quad (56)$$

Pri čemu je brzina širenja vala dana s  $v$ .

Kako se čestice otklanjaju jedna za drugom tako će one koje se nalaze na koordinati  $x_B$  kasnije u otklonu za početnom česticom za  $t - t_{x_B}$ . Elongacija čestica na koordinati  $x_B$  dana je s:

$$\Psi(x=x_B, t) = B \sin \omega(t - t_{x_B}) = B \sin(\omega t - \omega t_{x_B}) = B \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x_B}{v}) \quad (57)$$

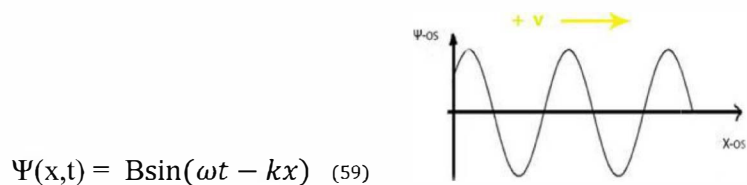
član  $\omega t_{x_B}$  predstavlja fazu kašnjenja čestica na položaju  $x = x_B$  za onima na  $x = 0$  položaju.

Izraz (57) možemo raspisati uz uvjete  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  i  $v = \lambda/T = f\lambda$ , pa je:

$$\Psi(x=x_B, t) = B \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x_B}{v}) = B \sin 2\pi (\frac{t}{T} - \frac{x_B}{Tv}) = B \sin 2\pi (\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}) = B \sin (2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x_B}{\lambda}) \quad (58)$$

član  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$  zovemo valni broj, izraz (58) možemo raspisati uz uvjet da smo

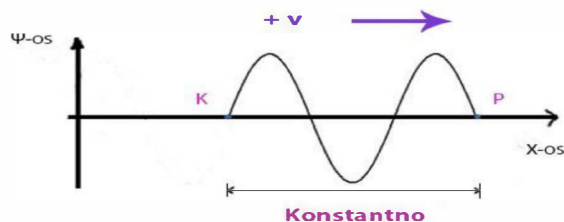
koordinatu  $x_B$  uzeli proizvoljno pa ona može predstavljati bilo koji položaj točke sredstva duž x-osi  $x_B = x$  i  $\omega = 2\pi/T$ , slijedi valna funkcija putujućeg vala u smjeru + x-osi



za putujući val koji se širi duž smjera pozitivne +x-osi, te ima konstantnu fazu početne i završne točke, vrijedi:

$$x = vt + \text{konstanta} \quad (60)$$

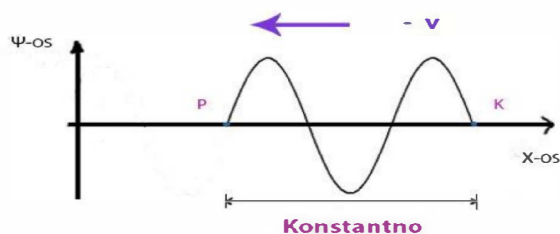
**Slika 10.**



Dok bi za val koji putuje u smjeru negativne  $-x$ -osi postepeno bi de smanjivala vrijednost  $x$  pa bi vrijedilo

$$x = -vt + \text{konstanta} \quad (61)$$

**Slika 11.**

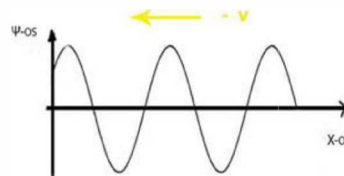


negativan predznak za brzinu širenja vala bi u ovom slučaju dao izraz za valnu funkciju oblika:

$$\Psi(x=x_B, t) = B \sin \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x_B}{v} \right) = B \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x_B}{\lambda} \right) = B \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x_B}{\lambda} \right) \quad (62)$$

val koji se širi u smjeru  $-x$ -osi valna funkcija s je:

$$\Psi(x, t) = B \sin(\omega t + kx) \quad (63)$$



U primjeru sa[Slike 9.] uzet je slučaj kad se čestice nalaze u ravnotežnom položaju na mjestu gdje započinje titranje. Mogao definirati općenit slučaj u kojem se čestice koje se zatitraju nalaze otklonjene od ravnotežnog položaja u početnom trenutku mjerenja za fazu  $\varphi_0$ . Općenit oblik valne funkcije (59) i (63)  $\rightarrow$  (64) i (65)

$$\Psi(x, t) = B \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (64)$$



$$\Psi(x,t) = B \sin(\omega t + kx + \varphi_0) \quad (65)$$

Kod elektromagnetskih valova može biti teško odrediti smjer širenja pomoću kartezijevog koordinatnog sustava. Umjesto širenja vala osi x, može se dobiti neki drugi pravac širenja, određen jediničnim vektorom.  $\vec{n}_0$ , valna funkcija postoje:

$$\Psi(\vec{r},t) = B \sin(k\vec{n}_0 \vec{r} - \omega t + \varphi_0) = B \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \varphi_0) \quad (66)$$

Pri čemu je valni vektor dan s  $\vec{k} = k\vec{n}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}_0$ .

Valno gibanje se umjesto trigonometrijskih funkcija može prikazati još i pomoću kompleksnih brojeva. Takav prikaz valne funkcije nam može bit elegantniji kod računanja nekih fizikalnih problema. Za kompleksnu eksponencijalnu funkciju vrijedi  $e^{i\omega t} = i \sin \omega t + \cos \omega t$ , pa se valna funkcija u eksponencijalnom obliku piše kao:

$$\Psi(x,t) = B e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} \quad (67)$$

Imaginarni dio te funkcije jednak prethodnoj sinusnoj valnoj funkciji. Valna funkcija je periodička u prostoru i vremenu vrijedi  $\Psi(x+\lambda, t+T) = \Psi(x,t)$ , pri čemu je  $\lambda$  prostorni geometrijski period, a T vremenski period.

Tad bismo za ukupno **rješenje valne jednadžbe**  $\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0$  (51)

primjenom matematičkih metoda mogli ispisat

Izraz  $\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0$  (51) možemo napisat u obliku  $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})\Psi(x,t) = 0$

.

Od kuda bismo dalje matematički mogli razvit izraze za derivaciju kao

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( v \frac{\partial}{\partial x \partial t} - v \frac{\partial}{\partial x \partial t} \right) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (69)$$

Od prethodnog primjera izraza (56) imali smo objašnjenje odnosa vremenskih varijabli kod širenja vala duž x-osi, tako bismo mogli uvest nove vremenske varijable povezane s koordinatom smjera širenja vala x kao  $\delta = t + \frac{x}{v}$ ,  $\gamma = t - \frac{x}{v}$ . zbrajanjem ova dva izraza dobijemo  $\delta + \gamma = 2t$  od kuda slijedi izraz za vrijeme  $t = \delta + \gamma / 2$ , oduzimanjem izraza  $\delta - \gamma = 2x / v$  slijedi položaj  $x = v (\delta - \gamma) / 2$ . Možemo dalje razvit derivacije lančanom metodom kao

$$\frac{\partial}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \delta} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \delta} \quad (70)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \quad (71)$$

Uvrstimo u ove izraze lančanog deriviranja prethodno dobivene izraze vremena i položaja, od kuda slijedi

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = \frac{v}{2}, \quad \frac{\partial t}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial x}{\partial \gamma} = -\frac{v}{2} \quad (72)$$

Što opet uvrstimo u desnu stranu izraza (70) odnosno (71), od kuda dalje slijedi

$$\frac{\partial}{\partial \delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (73)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (74)$$

Množenjem ova dva izraza dobijemo

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad (75)$$

Pomnožimo ovaj izraz valnom funkcijom  $\Psi(\delta(x, t), \gamma(x, t))$ , te usporedbom izraza valne jednadžbe  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(x, t) = 0$  od kuda možemo vidjeti kako se podudaraju vrijednosti u zagradi. Izraz unutar te zagrade mora biti jednak nuli kako bi jednadžba bila zadovoljena. Pa je

$$\frac{\partial^2}{\partial \delta \partial \gamma} \Psi(\delta, \gamma) = 0 \quad (76)$$

Iz ovog izraza dobivamo dva rješenja za valnu jednadžbu naime očigledno je da derivacija funkcije  $\Psi(\delta, \gamma)$  po  $\partial\delta$  daje rješenje oblika  $\Psi_1(\delta)$ , dok derivacija po  $\partial\gamma$  daje rješenje  $\Psi_2(\gamma)$ .

Iz čega slijedi očigledno rješenje oblika

$$\Psi(\delta, \gamma) = \Psi_1(\delta) + \Psi_2(\gamma) \quad (77)$$

$$\Psi(t + \frac{x}{v}, t - \frac{x}{v}) = \Psi_1(t + \frac{x}{v}) + \Psi_2(t - \frac{x}{v}) \quad (78)$$

Što nam daje opći izraz rješenja valne jednadžbe  $\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0$  (51) odnosno

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})\Psi(x,t) = 0 \text{ kao funkciju oblika } \Psi(x,t) = \Psi_1(t + \frac{x}{v}) + \Psi_2(t - \frac{x}{v}) \quad (79).$$

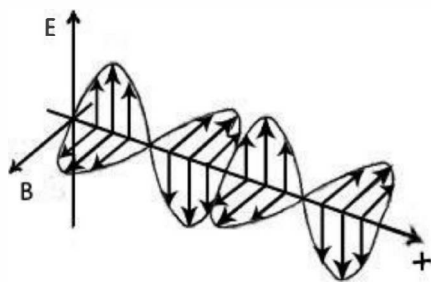
Što možemo us pomoć (59) i (63) napisat kao **opće rješenje valne jednadžbe je funkcija oblika**

$$\Psi(x,t) = B\sin(\omega t + kt) + B\sin(\omega t - kt) \quad (80)$$

### 3. Elektromagnetski valovi

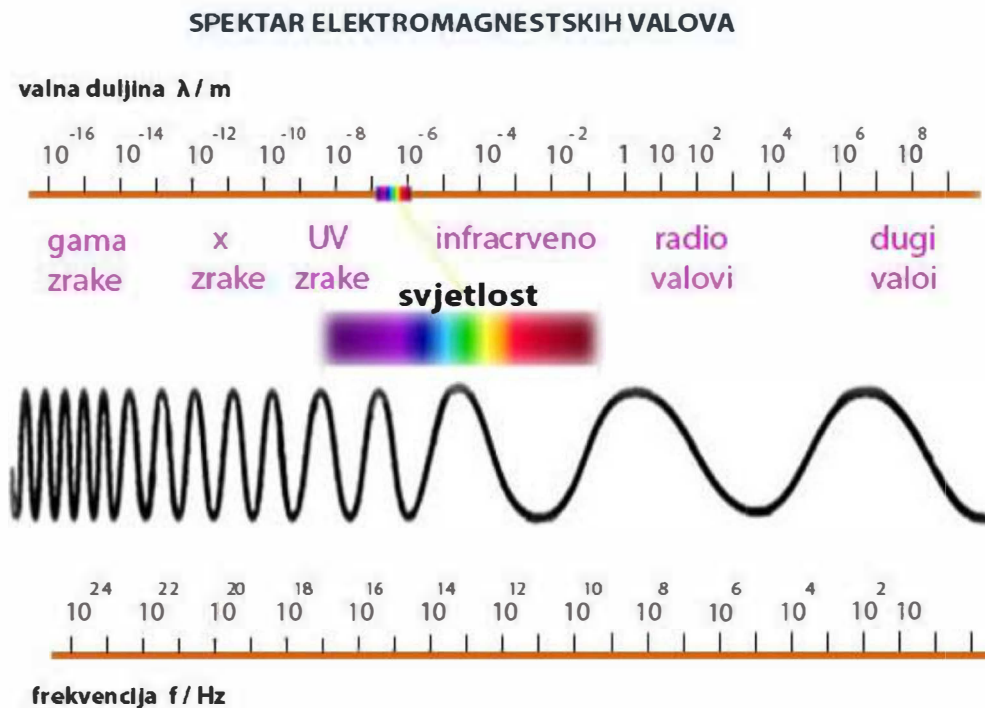
Svi valovi čije se širenje odvija titranjem električnog i magnetskog polja zovu se **elektromagnetski valovi [Slika 12]**. Za razliku od mehaničkih valova nije im potrebno sredstvo kako bi se širili. Nastanak tih valova povezan je s akceleriranim gibanjem električnog naboja. Ukoliko naboj titra emitira se kontinuirani elektromagnetski val. Ako naboj samo kratkotrajno akcelerira nastaje elektromagnetski val u obliku pulsa. Michelson i Morleyovim eksperimentom je dokazano kako je brzina širenja elektromagnetskog vala konstanta  $c \approx 2,99793 \cdot 10^8$  m/s što je ujedno i brzina širenja svih elektromagnetskih valova kroz vakuum. Time je definirana temeljna konstanta prirode. Ta brzina se mijenja ukoliko val prolazi kroz sredstvo.

Slika 12.



Elektromagnetski valovi se razlikuju po valnim duljinama ( $\lambda$ ) i frekvencijama ( $f$ ). Svjetlost je samo jedan dio spektra elektromagnetskih valova, onih valnih duljina koje možemo našim osjetilom oka spoznat od  $\lambda \approx (400\text{nm} - 800\text{nm})$ . Spektar elektromagnetskih valova se rasprostire od velikih valnih duljina poznatih nam kao radio valovi preko mikrovalova, infracrvenih valova do svjetlosti, te prema manjim valnim duljinama ultraljubičastim,  $x$  i  $\gamma$  – zrakama [Slika 13.].

Slika 13.



Izvod valne jednadžbe elektromagnetskog vala produkt je cijelog niza genijalnih fizikalnih istraživanja elektriciteta i magnetizma. Ključnu ulogu u stvaranju te jednadžbe odigrali su neki od istaknutih istraživača, njemački matematičar **Carl Friedrich Gauss**; je temeljem prethodnih istraživanja stacionarnog ponašanja naboja formirao matematičku vezu električnog polja i naboja, znanu kao tok električnog polja. Danski fizičara **Hans Christian Oersted** jednog studentskog predavanja otkrio kako električna struja prolaskom kroz žicu stvara polje koje djeluje silom na magnetsku iglu. **Oersted** je svojim istraživanjem definirao djelovanje struje silom na magnet što je Francuskog fizičara **Marie- André Ampère** potaknulo da napravi niz eksperimenata djeluje li inverzan proces, odnosno djeluje li magnet silom na struju. Danas se još uvijek ti termini rabe zbog povijesnog toka istraživanja znanosti. Međutim, puno bi bolje bilo rabiti izraze kao međudjelovanje polja struje i polja magneta nego djelovanje struje na magnet i obrnuto, iz trećeg Newtonovog zakona očigledno je jasno da se radi o međudjelovanju. **Oersted** je zbog puno manje mase magneta(igle kompasa) imao dojam da se radi više o djelovanju struje na magnet nego o međudjelovanju. **Ampèr** je napravio niz eksperimenata s puno većom masom magneta u odnosu na vodič kojim prolazi struja, i definira matematički izraz te sile koja se zove **Ampèrova** sila. Posljedica te sile je da danas imamo u velikom broju električnih uređaja elektromotor u kojem se vrši pretvorba električne energije u mehaničku. **Ampèr** je svojim eksperimentalnim istraživanjima,osim tog, otkrio kao se međusobno paralelni vodiči kojim prolazi struja privlače silom ili odbijaju ovisno o smjeru struje kroz vodiče. To je vodilo k makroskopskom opisu te sile, koju je dao Nizozemski fizičar **Hendrik Antoon Lorentz**. Kompletno objašnjenje i razumijevanje sile između naboja u gibanju dala je relativistička teorija čiji su najistaknutiji članovi **Albert Einstein, Lorentz, Poincaré**. U daljnjem stvaranju elektromagnetske valne jednadžbe potaknut **Ampèrovim** i **Oerstetovim** radovima Engleski istraživač **Michael Faraday** radi niz eksperimenata, kojima pokazuje inverzan proces pretvorbe električne energije u mehaničku. To će nas vodit jednom od najvećih tehnoloških razvoja u povijesti. Naime **Faraday** je otkrio stvaranje induciranog napona u vodiču koji se nalazi u promjenjivom magnetskom toku,te se smatra jednim od najplodnijih eksperimentalnih fizičara kao što se **Gauss** smatra jednim od najplodnijih matematičara. Potaknut ovim radovima škotski fizičar **James Clerk Maxwell** formira jednadžbe koje povezuju električno polje **E** i magnetsko polje **B**. Konačno, slijedi teorijski matematički izraz valne elektromagnetske jednadžbe koja predviđa transversalno gibanje elektromagnetskih valova.

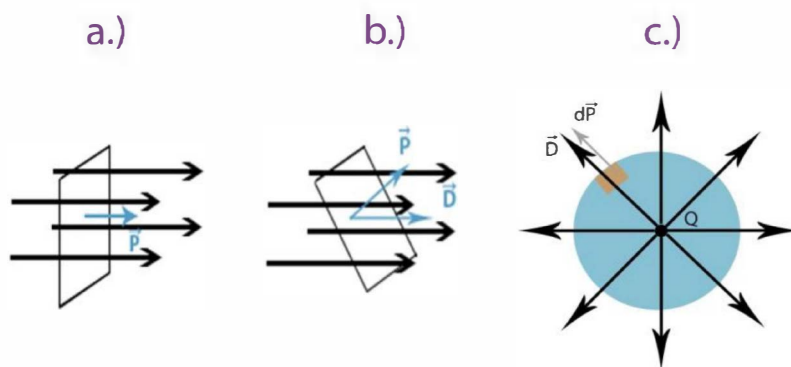
### 3.1. Gaussov zakon električnog polja, prva Maxwellova jednačba

Električni naboj u svojoj okolini stvara električno polje  $\vec{E}$ . Vezu tog naboja i njegovog polja  $\vec{E}$  možemo iskazati **Gaussovim zakonom**: Neka homogeno električno polje  $\vec{E}$  prolazi okomito na plohu **P** [Slika14.a]. Neka je vektor  $\vec{P}$  po iznosu jednak plohi **P**, a po smjeru jednak jediničnom vektoru  $\vec{d}$  (okomitom na površinu **P**) [Slika14.a]. Tada je tok električnog polja kroz tu plohu **P** [Slika14.a] dan s

$$\Phi = \epsilon E P = D P \quad (81)$$

Vektor pomaka ili gustoće toka dan je s  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  (82),

Slika14.(a,b,c)



Općenito, ako plohu **P** otklonimo od okomitog položaja na silnice električnog polja [Slika14.b], dobivamo neki kut  $\vartheta$  između vektora  $\vec{P}$  okomitog na plohu i električnog polja  $\vec{E}$ . Kad je kut  $\vartheta$  jednak nuli vektori električnog polja daju maksimalni doprinos toka kroz plohu  $\Phi(\vartheta = 0^\circ)_{MAX}$ . Postepenim pomicanjem kuta  $\vartheta = 0^\circ$  prema  $\vartheta = 90^\circ$  doprinos električnog polja kroz plohu se smanjuje. Kad kut dosegne  $\vartheta = 90^\circ$  vektori homogenog električnog polja su paralelni s plohom, što znači da ne prolaze više kroz plohu, tok iščezava za  $\Phi(\vartheta = 90^\circ)_{MIN} = 0$ . Izraz za tok (81) ovisan je o kutu  $\vartheta$ . Tok električnog polja kroz površinu **P**

$$\Phi = \epsilon \vec{E} \cdot \vec{P} = \epsilon E P \cos \vartheta = D P \cos \vartheta = \vec{D} \cdot \vec{P} \quad (82)$$

U daljnjem razvoju toka električnog polja uzmimo zatvorenu plohu **P** sfere u čijem se središtu nalazi točkasti električni naboj **+Q** [Slika14.c.]. Silnice električnog polja izviru iz naboja **+Q**, prolaze kroz unutrašnju stranu plohe **P** prema van iz sfere. Silnice pri prolasku iz plohe imaju okomit smjer na plohu iznos vektora električnog polja u svim točkama plohe istog je iznosa. Tok je dan izrazom (81), pri čemu je ploha **P** sfere  $4\pi R^2$ , a **R** je udaljenost od naboja do površine **P**. Tad je tok:

$$\Phi = DP = D4\pi R^2 = \epsilon E 4\pi R^2 \quad (83)$$

naboj koji miruje u središtu plohe mirne sfere daje električno polje na plohi te sfere

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \quad (84)$$

Uvrstimo (84) u (83), slijedi da je tok kroz plohu sfere

$$\Phi = \epsilon E 4\pi R^2 = \epsilon \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} 4\pi R^2 = Q \quad (85)$$

**Gauss** je napravio općeniti matematički izvod toka električnog polja naboja kroz proizvoljno odabranu zatvorenu plohu, unutar koje se nalazi taj naboj. Uzmemo li bilo koju zatvorenu plohu **P** unutar koje se nalazi naboj, možemo izdvajanjem malih, približno ravnih elementa  $\Delta\mathbf{P}$  plohe **P**, kod kojih točke elemenata  $\Delta\mathbf{P}$  imaju konstantne vrijednosti električnog polja. Kod izvoda za ukupni tok, male približno ravne elemente  $\Delta\mathbf{P}$  možemo usporediti s prvim izvodom (81), [Slika14.a], vektor  $\vec{\Delta\mathbf{P}}$  ima iznos površine elementa  $\Delta\mathbf{P}$  a smjer vektora  $\vec{\mathbf{D}}$  okomitog na taj element. Svaki mali element  $\Delta\mathbf{P}$  površine pri čemu **P** daje mali doprinos toku  $\Delta\Phi_n = \vec{\mathbf{D}}_n \cdot \vec{\Delta\mathbf{P}}_n$ . Ukupni tok električnog polja bilo koje zatvorene plohe u kojoj se nalazi naboj je zbroj svih tih malih  $\Delta\Phi_n$  doprinosa:

$$\Phi = \vec{\mathbf{D}}_1 \cdot \vec{\Delta\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{D}}_2 \cdot \vec{\Delta\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{D}}_3 \cdot \vec{\Delta\mathbf{P}}_3 + \dots + \vec{\mathbf{D}}_n \cdot \vec{\Delta\mathbf{P}}_n = \sum_{b=1}^n \vec{\mathbf{D}}_b \cdot \vec{\Delta\mathbf{P}}_b \quad (86)$$

Ukupni fizikalno točni rezultat dobije se primjenom diferencijalnog računa, odnosno kad se ploha izgadi, a to se postiže puštanjem elemenata površine  $\Delta\mathbf{P}$  u računu da teži nuli  $\Delta\mathbf{P} \rightarrow 0$ .

Suma svih tih doprinosa zatvorene plohe postaje dvostruki zatvoreni plošni integral  $\oint_P$  odnosno

$$\Phi = \lim_{\Delta P_b \rightarrow 0} \sum_{b=1}^n \vec{\mathbf{D}}_b \cdot \vec{\Delta\mathbf{P}}_b = \oint_P \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{P}} \quad (87)$$

Usporedbom (87) toka kroz proizvoljnu zatvorenu površinu u kojoj se nalazi naboj s tokom (85) kroz površinu zatvorene sfere dobivamo

$$\Phi = \oint_P \vec{D} \cdot d\vec{P} = Q \quad (88)$$

Tok kroz tu zatvorenu površinu jednak je plošnom integralu doprinosa  $\vec{D} \cdot d\vec{P}$  površine te plohe i ukupnom naboju koji obuhvaća (88). to je **Gaussov zakon**, osnova elektrostatike.

Tok je jednak algebarskom zbroju svih naboja u volumenu koji obuhvaća ta ploha. Ako je naboj unutar volumena dan volumnom gustoćom raspodjele  $\rho [C/m^3]$ . Tada je ukupni naboj unutar zatvorene plohe **P** koja obuhvaća volumen **V**, integral po tri prostorne koordinate tog volumena i raspodjele gustoće naboja  $\rho$  unutar volumena

$$Q = \iiint_V \rho dV \quad (89)$$

Uvrštavanjem (89) u (88), slijedi

$$\Phi = \oint_P \vec{D} \cdot d\vec{P} = \oint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P} = Q = \iiint_V \rho dV \quad (90)$$

Konačno je

$$\oint_P \vec{E} \cdot d\vec{P} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV \quad (91)$$

Što je **1. Maxwellova jednačba u integralnom obliku.**

**Gausovim teoremom divergencije**, vektorske analize matematike koja se bavi diferencijalnom i integralnim računom nad vektorskim poljem. Pretvara se **1. Maxwellova jednačba** integralnog oblika u diferencijalni oblik. Što omogućava promatranje električnog polja u nekoj točki prostora. **Gausovim teoremom** se povezuje tok  $= \oint_P \vec{M} \cdot d\vec{P}$  nekog vektora  $\vec{M}$  zatvorene površine **P** s divergencijom vektora  $\vec{M}$  kroz volumen koji obuhvaća ta zatvorena površina kao

$$\oint_P \vec{M} \cdot d\vec{P} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{M} dV \quad (92)$$

Usporedbom **Gaussovog teorema** (92) s **1. Maxwellovom jednačbom** integralnog oblika (91).



$$\oint_P \vec{E} \cdot d\vec{P} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon} dV \quad (93)$$

Dobivamo **1.Maxwellovu jednadžbu u diferencijalnom obliku**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (93),$$

Pri čemu je nabra  $\nabla$  **Hamiltonov** matematički operator. U kartezijevom koordinatnom sustavu ima oblik  $\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ , a u drugim koordinatnim sustavima ima drugi oblik.

### 3.2. Gaussov zakon za magnetsko polje, druga Maxwellova jednadžba

Izvod **Gaussovog** zakona magnetskog polja ima sličan princip kao za električno polje, samo što kod električnog polja imamo silnice koje izviru (+Q) ili poniru (-Q) u naboj pa zatvorena ploha koja obuhvaća taj naboj ima izlaz ili ulaz silnica u plohu. One silnice koje izlaze iz zatvorene plohe definiraju se kao pozitivne, dok one koje ulaze u plohu kao negativne. Kod električnog polja imamo samo ulaz ili samo izlaz silnica ovisno o naboju unutar plohe, ako imamo više naboja algebarskim zbrojem dobivamo jedan od predznaka silnica u plohu ili nulu. Kod magnetskog polja zatvorena ploha koja ima izlaz silnica magnetskog polja iz plohe ima opet ulaz istih silnica u istu plohu. Magnet se uvijek u prirodi javlja s dva pola: sjevernim(N) iz kojeg silnice izviru i južni(S) u koji poniru te iste silnice, bez obzira na koliko se dijelova razdjeli magnet on uvijek ima južni i sjeverni pol. Karakteristika magnetskih silnica je da iste čine zatvorenu liniju [**Slika15.**], od kud slijedi da je divergencija magnetskog polja jednaka nuli. Izlaz silnica iz plohe i ponovni ulazu u istu plohu daje ukupan tok jednak nuli.

Slika15.



Tok magnetskih silnica se definira sličnim načinom kao tok električnog polja. Slijedi da je tok magnetskog polja kroz bilo koju zatvorenu plohu dvostruki plošni integral skalarnog produkta  $\vec{B} \cdot d\vec{P}$  preko te plohe P

$$\Phi_B = \oint_P \vec{B} \cdot d\vec{P} = 0 \quad (94);$$

što je **2. Maxwellova jednadžba u integralnom obliku.**

**Gaussovom** teoremom drugu **Maxwellovu** jednadžbu u integralnom obliku pretvaramo u diferencijalni oblik:

$$\oint_P \vec{B} \cdot d\vec{P} = 0 = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \iiint_V 0 dV \quad (95);$$

Od kud slijedi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0 \quad (96).$$

što je **2. Maxwellova jednadžba u diferencijalnom obliku**

### 3.3. Faradayev zakon indukcije, treća Maxwelllova jednačba

**Faraday** eksperimentalnom metodom otkriva pojavu električne struje u vodiču koji se nalazi u promjenjivom magnetskom polju, odnosno promjenom magnetskog toka u vremenu inducira se napon u vodiču. Inducirani napon  $\varepsilon_{inducirani}$  to je veći što se brže mijenja magnetski tok

$$\varepsilon_{inducirani} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (97)$$

Negativni predznak ispred je posljedica zakona očuvanja energije, a objašnjava se **Lenzovim** pravilom. Pravilo kaže da se napon inducira uvijek tako da struja koja nastane tim naponom stvara magnetsko polje koje uvijek svojim smjerom nastoji poništiti promjenu magnetskog toka (uzroka te indukcije). Ako se magnetski tok povećava smjer struje u vodiču je takav da svojim magnetskim poljem nastoji smanjit to povećanje, a ako se magnetski tog smanjuje smjer struje je takav da nastoji svojim magnetskim poljem povećati tok.

Mikroskopski opis **Faradayog** zakona indukcije se pojašnjava pomoću **Lorentzove** sile. Ta je sila zbroj električne  $q\mathbf{E}$  i magnetske sile  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  na naboj  $q$

$$\vec{F}_{Lorentz} = q ( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} ) \quad (98)$$

Ponekad se za Lorentzovu silu uzima samo magnetska sila jer je to izvorni oblik

$$\vec{F}'_{Lorentz} = q( \vec{v} \times \vec{B} ) \quad (99);$$

Pri čemu je  $q$  naboj koji se giba brzinom  $\mathbf{v}$  u magnetskom polju  $\mathbf{B}$ . Smjer djelovanja sile na naboj možemo odrediti pravilom desne ruke gdje palac predstavlja smjer brzine, prsti smjer magnetskog polja, a sila na  $(+q)$  naboj ima smjer iz dlana. Vektorski umnožak  $\vec{v} \times \vec{B} = vB \sin \alpha$  daje ovisnost sile na naboj o međusobnom položaju brzine i linija magnetskog polja. Slijedi da je sila na naboj  $q$  maksimalna, kad su brzina  $\vec{v}$  i magnetsko polje  $\vec{B}$  međusobno okomiti a minimalna kad su paralelni. Za izvod treće **Maxwellove** jednačbe uzmimo idealan primjer slično kao što je to bilo kod **Gaussovog** izvoda za tok. Neka se ravni metalni vodič duljine  $L$  nalazi u homogenom magnetskom polju  $\mathbf{B}$  i giba brzinom  $\mathbf{v}$  okomito na silnice tog magnetskog polja. Unutar kristalne strukture vodiča se nalaze slobodni elektroni nosioci naboja  $q = -e$ . Pod utjecajem **Lorentzove** sile ti se naboji unutar vodiča gibaju u jednom smjeru po pravilu desne ruke od jednog kraja vodiča npr. točke  $\mathbf{G}$  do drugog kraja  $\mathbf{D}$ . Time se

dogaća skupljanje jedne vrste naboja na jednom kraju vodića dok na drugom kraju imamo skupljanje druge vrste naboja. Skupljanje naboja na kraju tog ravnog vodića stvara električno polje  $\vec{E}_{\text{inducirano El. Polje}}$  koje će nakon nekog vremena dati silu  $q\vec{E}_{\text{inducirano El. Polje}}$  na naboje  $q$  u gibanju, koja će se uravnotežiti s magnetskom silom  $q(\vec{v} \times \vec{B})$ . To se dogaća kad su sile jednake po iznosu a suprotne po smjeru. Možemo pisati da je nakon nekog trenutka ukupna **Lorentzova** sila jednaka nuli

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = 0 = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q((-\vec{v} \times \vec{B}) + (\vec{v} \times \vec{B})) \quad (100)$$

Od kuda slijedi kako indukcija u štapu prestaje kada je  $\vec{E}_{\text{inducirano El. Polje}} = -\vec{v} \times \vec{B}$ . Ako razmotrimo slučaj od početnog trenutka kad vodić miruje u magnetskom polju nema gibanja naboja tad je  $\vec{E}_{\text{inducirano El. Polje}} = 0$ . Postepenim pomicanjem vodića brzinom  $v$  javlja se magnetska sila na naboje, koji se postepeno krenu gibati prema kraju vodića. Time se postepeno mijena vrijednost električnog polja od  $\vec{E}_{\text{inducirano El. Polje}} = 0$  do  $\vec{E}_{\text{inducirano El. Polje}} = -\vec{v} \times \vec{B}$ , pa je električno polje  $\vec{E}_{\text{inducirano El. Polje}}$  u tom postepenom mijenjanju od vrijednosti nula do  $-\vec{v} \times \vec{B}$  kad postaje elektrostatsko. Slijedi da je inducirani napon proporcionalan cirkulaciji neelektrostatskog polja ( $U = \oint E ds$ ), slijedi

$$\varepsilon_{\text{inducirani}} = U = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E}_{\text{inducirano El. polje}} d\vec{s} \quad (101)$$

U prethodnom primjeru gibanja štapa brzinom  $v$  kroz okomite silnice magnetskog polja  $B$  promjena magnetskog toka  $d\Phi$  se definira kroz onaj dio površine koji štap prebriše svojim gibanjem. Naime magnetski tok je  $\Phi = B p_{\text{pov.p}} \sin \alpha$ . U ovom slučaju kut između plohe i silnica je  $\alpha = 90^\circ$ , površina je umnožak duljine ravnog vodića  $L_{y\text{-os}}$  i puta koji taj vodić prijeđe ( $v dt$ )<sub>x-os</sub>, dakle  $p_{\text{pov.p}} = L_{y\text{-os}}(v dt)_{x\text{-os}}$ . Slijedi da je promjena toka  $d\Phi = B dp_{\text{pov.p}} = B L_{y\text{-os}}(v dt)_{x\text{-os}}$ . Naboj  $q = -e$  se gibao duž duljine vodića  $L_{y\text{-os}}$  od neke točke **G** do točke **D** kraja vodića. Daljim razvojem izraz (101) postaje

$$\varepsilon_{\text{inducirani}} = U = BLv = \oint \vec{E}_{\text{inducirano El. polje}} d\vec{s} \quad (102)$$

$BLv$  se pomoću izvoda magnetske sile i činjenice da se naboj giba od neke točke **G** do točke **D** može pisat kao  $BLv = \int_D^G (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$ , pa je inducirani napon ravnog vodića

$$\varepsilon_{\text{inducirani}} = U = BLv = \int_D^G (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} = \oint \vec{E}_{\text{inducirano El. polje}} d\vec{s} \quad (103)$$

Ovakav izvod primjera indukcije u ravnom vodiču možemo općenito pisati za neku krivulju  $K$  gdje se površina  $L$   $y$ -os ( $v dt$ )  $x$ -os koju obuhvaća ta krivulja mijenja preko dvije osi. Stoga slijedi dvostruki plošni integral po površini  $P = \iint_{x,y} dP$ . Tada je tok magnetskog polja

$$\Phi = \iint_P \vec{B} d\vec{P} \quad (104)$$

Općenito inducirani napon prikazujemo cirkulacijom induciranog električnog polja po zatvorenoj krivulji  $K$ , tok u računu je kroz površinu  $P$  koju ta krivulja obuhvaća

$$\mathcal{E}_{inducirani} = \oint_K \vec{E}_{inducirano \text{ El. polje}} d\vec{s} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_P \vec{B} d\vec{P} \quad (105);$$

$$\text{odnosno} \quad \oint_K \vec{E}_{inducirano \text{ El. polje}} d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_P \vec{B} d\vec{P} \quad (106)$$

To je **3. Maxwellova jednadžba u integralnom obliku.**

Diferencijalni oblik ove jednadžbe se dobije primjenom **Stokesovog** teorema, koji povezuje linijski integral tangencijalne komponente nekog vektora  $\vec{V}$  po krivulji koja obuhvaća neku plohu  $P$  s integralom normalne (okomite na površinu) komponente rotacije vektora  $\vec{V}$ .

$$\iint_P \vec{\nabla} \times \vec{V} d\vec{P} = \oint_K \vec{V} d\vec{s} \quad (107)$$

$$\text{Od kuda} \quad \oint_K \vec{E}_{inducirano \text{ El. polje}} d\vec{s} = \iint_P \vec{\nabla} \times \vec{E}_{inducirano \text{ El. Polje}} d\vec{P} = - \frac{d}{dt} \iint_P \vec{B} d\vec{P} \quad (108)$$

slijedi **3. Maxwellova jednadžba u diferencijalnom obliku**

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{inducirano \text{ El. polje}} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (109)$$

### 3.4. Ampèrov zakon, četvrta Maxwellova jednadžba

Za izvod četvrte **Maxwellove** jednadžbe uzmimo primjer dugog ravnog vodiča kojim teče struja  $I$ . Tad se oko tog vodiča javlja magnetsko polje čije su linije zatvorene koncentrične kružnice oko vodiča. Na svakoj točki kružnih silnica nalazi se vektor magnetskog polja. Taj vektor magnetskog polja ovisi o iznosu strije  $I$  i udaljenosti  $r$  od vodiča.

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (110)$$

Gdje se veličina  $\vec{H}$  naziva magnetsko polje  $\vec{H} = \vec{B} / \mu$  a veličina  $\vec{B}$  magnetska indukcija, zbog jednostavne povezanosti ovih veličina često se i  $\vec{B}$  zove magnetskim poljem. Veličina  $\mu$  predstavlja apsolutnu permeabilnost  $\mu = \mu_0 \mu_r$ . Pri tome je  $\mu_0$  karakteristična permeabilnost vakuumu i konstantna je. Dok je  $\mu_r$  relativna permeabilnost karakteristična za neku tvar. Promotrimo linijski integral  $H$  po koncentričnoj kružnici oko vodiča:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (111)$$

Pri čemu  $d\vec{s}$  vektor infinitezimalno malog pomaka po zatvorenoj krivulji  $K$ . Tad je cirkulacija magnetskog polja ravnog vodiča

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_K \frac{I}{2\pi r} ds = \frac{I}{2\pi r} \oint_K ds \quad (112)$$

$\oint_K ds$ , je opseg kružnice i jednak je  $2\pi r$ . Slijedi da je linijski integral jednak struji  $I$  koju obuhvaća ta zatvorena kružnica. Općenito vrijedi ako zatvorena krivulja  $K$  obuhvaća više struja

$$\oint_{Kr} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I \quad (113)$$

$$\oint_{Kr} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \sum I \quad (114)$$

Daljnji razvoj **Ampèreovog** zakona razmatra slučaj kondenzatora spojenog preko vodiča na izvor napona. U trenutku spajanja napona na vodič u njemu potekne struja prema kondenzatoru koji se postepeno puni nabojem, što vodi postepenom povećavanju električnog polja između ploča kondenzatora. Kondenzator ima oblik prekida vodiča kroz koji nema više provodne struje  $I_{provodna}$ . Međutim, da bi i dalje vrijedila druga **Maxwellova** jednačba i jednačba kontinuiteta, **Maxwell** je postavio hipotezu o **struji pomaka** kroz kondenzator. Zbog zakona očuvanja naboja struja pomaka i provodna struja su jednake. Postoji veza između toka električnog polja i struje pomaka. Možemo primijeniti **Gaussov** zakon oko jedne od ploča kondenzatora tako da definiramo zatvorenu plohu oko te ploče kondenzatora, neka to bude ploča s pozitivnim nabojem. Tad za tok električnog polja te ploče vrijedi

$$\Phi = \oint_P \vec{D} \cdot d\vec{P} = \oint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P} = Q \quad (115)$$

Iz definirane jednakosti struja slijedi

$$I_{provodna} = I_{pomaka} = \frac{dQ}{dt} \quad (116)$$

Nakon uvrštavanja (115) u (116) slijedi

$$I_{pomaka} = \frac{d}{dt} \oint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P} \quad (117)$$

Prethodni integral u (117) daje struju pomaka kroz cijelu zatvorenu plohu. Ograničimo se samo na jedan dio plohe, onaj između ploča. Prethodni integral prelazi u

$$I_{pomaka} = \frac{d}{dt} \iint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P} \quad (118)$$

Na početku ovog poglavlja bilo je riječi o tome kako se iz **Oerstedovog** eksperimenta oko vodiča kojim prolazi provodna struja  $I_{provodna}$  stvara magnetsko polje. Isto se tako i oko struje pomaka  $I_{pomaka}$  kroz kondenzator stvara magnetsko polje, što je bila ključna **Maxwellova** ideja. Stoga je razvoj ideje **Maxwellove** jednadžbe za **Ampèrov** zakon poprimio novu komponentu. Prethodni izvod za vodič  $\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \Sigma I$  (114) dobiva svoju proširenu verziju za vrijednost struje pomaka kroz kondenzator:

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu(I_{provodna} + I_{pomaka}) \quad (119)$$

Uvrštavanjem (117) u (118) slijedi

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu(I_{provodna} + \frac{d}{dt} \iint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P}) \quad (120)$$

Kao što se **Gaussov** zakon proširio za gustoću naboja unutar zatvorene plohe, tako se struja pomaka može proširiti za gustoću struje  $\vec{J}$  prolaska kroz plohu **P**, zatvorenu krivuljom **K**:

$$I_{provodna} = \iint_P \vec{J} \cdot d\vec{P} \quad (121)$$

Stoga izraz (119) poprima svoj potpuni oblik, kao

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \left( \iint_P \vec{J} \cdot d\vec{P} + \frac{d}{dt} \iint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P} \right) \quad (122)$$

To je **4. Maxwellova jednadžba u integralnom obliku**.

Diferencijalni oblik ove jednadžbe se dobije primjenom **Stokesovog** teorema vektorske analize, kao

$$\oint_{Kr} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_P \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{P} = \mu \left( \iint_P \vec{J} \cdot d\vec{P} + \frac{d}{dt} \iint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P} \right) = \iint_P \left( \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{P} \quad (123 - a)$$

Slijedi: 
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (123 - b);$$

što je **4. Maxwellova jednadžba u diferencijalnom obliku**

Važno je uočiti fizikalnu simetriju između **Ampèrovog** i **Faradayevog** zakona.

### 3.5 Valna Maxwellova jednadžba

Matematički izvod elektromagnetske valne jednadžbe iskazuje se preko **Maxwellovih** jednadžbi.

	Integralni oblik	Diferencijalni oblik
1.	$\oint_P \vec{E} \cdot d\vec{P} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho \, dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$
2.	$\oint_P \vec{B} \cdot d\vec{P} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0$
3.	$\oint_{Kr} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_P \vec{B} \cdot d\vec{P}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$
4.	$\oint_{Kr} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \left( \iint_P \vec{J} \cdot d\vec{P} + \frac{d}{dt} \iint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P} \right)$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$

**Tablica1. Maxwellove jednadžbe**



Matematički operator  $\vec{\nabla}$  djeluje na neku skalarnu funkciju  $f(x,y,z)$  ili na vektorsku funkciju  $\vec{V}(x,y,z) = \hat{x}V_x(x,y,z) + \hat{y}V_y(x,y,z) + \hat{z}V_z(x,y,z)$ . Ako se operator primjeni na skalarnu funkciju  $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ , kao rezultat dobiva se vektor gradijent **grad f**. **Vektorsko polje** je kada neku veličinu u svakoj točki prostora opisujemo vektorom, primjeri vektorskog polja ( $\vec{E}, \vec{B}$ ). Na dva načina se može djelovati operatora  $\vec{\nabla}$  na neko **vektorsko polje**  $\vec{V}(x,y,z)$ .  $\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$

$$1. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} V_x(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} V_y(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} V_z(x,y,z) \quad (124)$$

Dobiva se skalar koji zovemo divergencija, **div**  $\vec{V}(x,y,z)$

$$2. \quad \vec{\nabla} \times \vec{V}(x,y,z) = \hat{x}(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}) + \hat{y}(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}) + \hat{z}(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}) \quad (125)$$

Dobiva se vektor koji zovemo rotor, **rot**  $\vec{V}(x,y,z)$

Diferencijalne **Maxwellove** jednadžbe iz [tablice 1.] imaju jednostruku primjenu operatora  $\vec{\nabla}$  odnosno derivacija, dok prethodno definirane valne jednadžbe (54) uvijek sadrže druge derivacije. Stoga za izvod valne elektromagnetske jednadžbe upotrijebimo drugu derivaciju, odnosno primjenu drugog operatora  $\vec{\nabla}$  na diferencijalni oblik **Maxwellovih** jednadžbi. Situaciju možemo promatrati u nekom mediju ili u vakuumu. Radi jednostavnosti uzmimo elektromagnetski val koji se nalazi u vakuumu. Tad je u prvoj **Maxwellovoj** jednadžbi izraz za volumnu gustoću raspodjele naboja  $\rho = 0$ , dok je u četvrtoj jednadžbi također izraz za gustoću struje  $\vec{J} = 0$ . Primijenimo tada operator  $\vec{\nabla}$  na **Maxwellove** jednadžbe:

$$1. \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{0}{\epsilon} \right) = 0 \quad (126)$$

$$2. \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0 \quad (127)$$

$$3. \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu\epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}) \quad (128)$$

$$4. \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times (0 + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}) = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (129)$$

Slijedi **valna jednadžba elektromagnetskog vala** komponente **električnog polja**.

$$\text{Iz 1. i 3.} \quad -\nabla^2 \vec{E} = -(\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}) \quad (130)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (131)$$

To se podudara s općenitim oblikom valne jednačbe  $\nabla^2 \Psi(x, y, z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0$  (54).

Slično slijedi **valna jednačba elektromagnetskog vala za magnetsko polje.**

Iz 2.14. 
$$-\nabla^2 \vec{B} = -(\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}) \quad (132)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (133)$$

Kad usporedimo ove valne jednačbe s prethodno dobivenom valnom jednačbom (54) te uvjeta da se elektromagnetski val nalazi u vakuumu, pa je permeabilnost i dielektričnost dana konstantama za vakuum ( $\mu_0, \epsilon_0$ ), slijedi da je brzina elektromagnetskog vala

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad (134);$$

Pa je: 
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (135)$$

Kad se uvrste vrijednosti ( $\mu_0, \epsilon_0$ ) za vakuum, dobije se brzina  $v = c \approx 2,99793 \cdot 10^8$  m/s, Koja se podudara s eksperimentalnom brzinom svjetlosti dobivene Michelson i Morleyevim eksperimentom. To je dokaz da je svjetlost elektromagnetski val.

**Rješenje elektromagnetske valne jednačbe** putujućeg ravnog elektromagnetskog vala nastalog harmonijskim titranjem izvora, koji se širi duž x osi možemo dobiti usporediti s prethodno definiranim rješenjima mehaničkih valova, kao

Iz (131) 
$$\vec{E}_z(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi) \hat{z} \quad (136)$$

Iz (133) 
$$\vec{B}_y(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t + \varphi) \hat{y} \quad (137 A)$$

Rješenja ovih jednačbi često je jednostavnije pisati u eksponencijalnom obliku, definiranom u poglavlju matematički opis valnog gibanja, kao

$$\vec{E}_z(x, t) = E_0 e^{(kx - \omega t)} \hat{z}, \quad \vec{B}_y(x, t) = E_0 e^{(kx - \omega t)} \hat{y} \quad (137 B)$$

Rješenje valne elektromagnetske jednadžbe poprima dodatna svojstva uz uvjet da je valni broj povezan kružnom frekvencijom definiranom prethodnim izvodom kao  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}$ , te širenja vala duž osi-x. Tada električno polje ovisi samo o koordinati  $x$  i vremenu  $t$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{0x} \sin(kx - \omega t) \hat{x} + E_{0y} \sin(kx - \omega t) \hat{y} + E_{0z} \sin(kx - \omega t) \hat{z} \quad (138)$$

Ako vektori električnog polja titraju u smjeru z-osi amplituda vala jednaka je  $E_{0z} = E_0$ .

Primjenom 4. **Maxwellove** jednadžbe na komponentu z električnog polja za vakuum ( $\vec{J} = 0$ )

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}_z}{dt} = \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial y} \text{ i transversalnosti } \vec{B}_x = 0$$

Slijedi:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}_z}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}_z}{dt} = \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} \quad (139)$$

Deriviranjem po z komponenti izraza (138) slijedi:

$$\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = -E_{0z} \omega \cos(kx - \omega t) \quad \text{i} \quad \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} = E_{0z} k \cos(kx - \omega t) \quad (140)$$

Usporedbom preko s

$$E_{0z} \cos(kx - \omega t) = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{k} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} \quad (141)$$

Slijedi

$$\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = -\omega \left(\frac{1}{k}\right) \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} \quad (142)$$

Povezivanjem izraza (139) s izrazom u (142), te činjenice da električni vektori vala titraju s jedne i druge strane koordinatnog sustava predznak može biti minus ili plus, slijedi

$$c^2 \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} = c \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} \quad (143)$$

Od kud slijedi

$$\vec{B}_y = \frac{\vec{E}_z}{c} \quad (144)$$

Što znači da je komponenta magnetskog polja za brzinu svjetlosti  $c$  manja od komponente električnog polja u elektromagnetskom valu, što ima značajnu ulogu kod interakcije elektromagnetskog vala i materije. Naime komponenta magnetskog polja je puno manja od električne komponente što daje mali doprinos u interakciji, **Lorentzova** sila je mala dok

dominira električna. Prethodno definirana rješenja valne elektromagnetske jednadžbe još se mogu pisati kao

$$\vec{E}_z(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi) \hat{z} \quad (145)$$

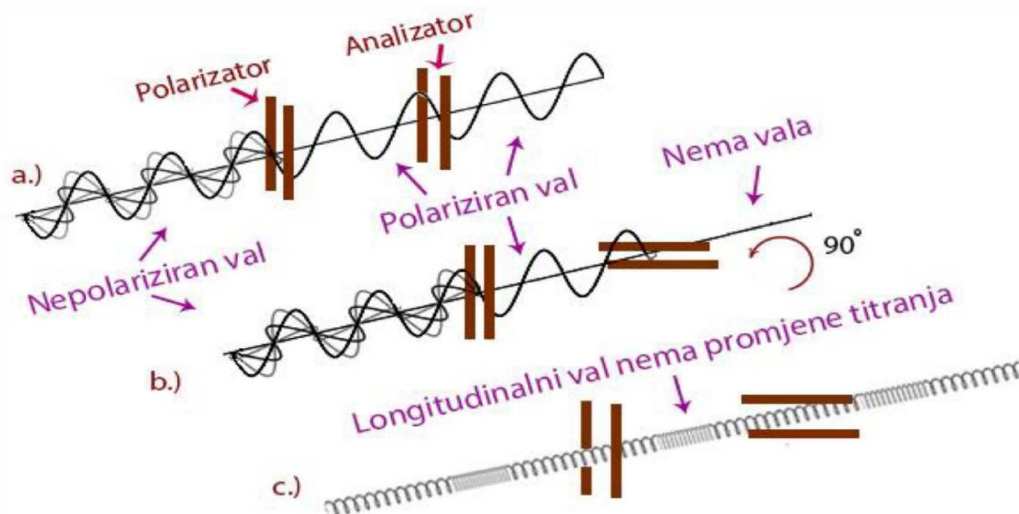
$$\vec{B}_y(x, t) = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t + \varphi) \hat{y} \quad (146)$$

## 4. Teorijsko određivanje stupnja polarizacije i Brewsterov kut

### 4.1. Polarizacija valova

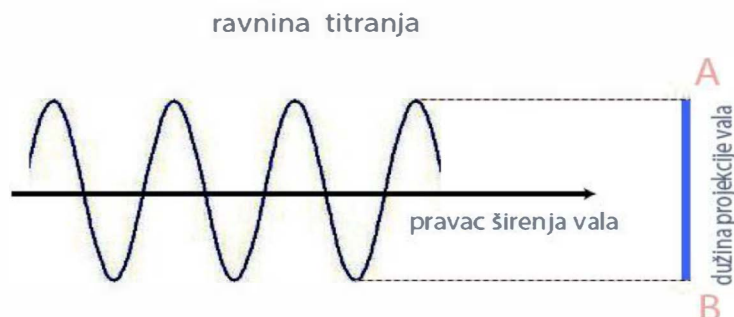
Eksperimentalno određivanje polarizacije valova daje fundamentalni dokaz o transverzalnom gibanju vala. Kao zoran primjer jednostavnog eksperimentalnog određivanja polarizacije vala može se poslužiti intuitivno jasnim mehaničkim valovima. Ako uzmemo eksperimentalni postav od ravnog užeta jednim krajem čvrsto privezanim, dok drugi slobodni kraj služi za titraje, te dva para jednostavnih ravnih šipki. Postavimo par šipki okomito zabijenih u zemlju te drugi par simetrično postavljen u odnosu na prvi. Neka ravno uže prolazi između paralelnih šipki kroz oba para [Slika16]. Slobodni kraj užeta titramo okomito u svim smjerovima, tako da se titraji prenosi valom okomito na sredstvo (uže). Valovi od slobodnog kraja užeta (izvora) do prvog para paralelnih šipki čine nepolarizirani val. Prolaskom vala kroz prvi par šipki titranje postaje usmjereno. Čestice sredstva (užeta) titraju paralelno sa dužinom šipki. Takvo titranje vala se može smjestiti u ravninu [Slika17], i val je tad transverzalno polariziran.

Slika 16(a,b,c).



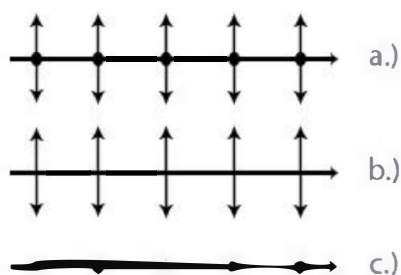
Ako polarizirani val titra u jednoj ravni tad je on linearno polariziran, naime val se tad u smjeru širenja može projicirati duž jedne linije. Elektromagnetski valovi još mogu biti cirkularno i eliptički polarizirani. Takve polarizacije valova daju dvije okomite linije projekcije vala. Prethodno linearno polarizirani val kroz prvi par šipki zakretanjem šipki za devedeset stupnjeva u drugom paru val prestaje trati [Slika16.b]. To je svojstvo transverzalnih valova. Prvi par šipki nazivamo **polarizator** dok drugi par nazivamo **analizator**. Svojstvo je longitudinalnih valova da bez promjene titranja prolaskom kroz polarizator i analizator nastavljaju propagaciju titranjem.

Slika17.



Nepolarizirani elektromagnetski val ili obična svjetlost : prethodno opisani transverzalni mehanički valovi se šire kroz sredstvo titranjem čestica sredstva okomito na smjer širenja vala. elektromagnetski valovi šire se titranjem električnih i magnetskih polja okomito na smjer širenja vala. Način na koji će električni vektori titrati ovisi o načinu kojim izvor elektromagnetskog vala titra. Ako je izvor umjetni linearni pravocrtni u kojem naboj titra pravilno (primjer ravne antene), tad je nastali elektromagnetski val transverzalan linearno polariziran. Međutim, prirodni izvori elektromagnetskih valova nemaju takav stalni pravilni kontinuirani izvor. Primjeri takvih izvora mogu biti zvijezde u kojima se pod utjecajem gravitacije lakši kemijski elementi spajaju u teže, od kud se oslobađa dio energije u obliku elektromagnetskog vala. Česti izvori elektromagnetskih valova su prijelazi elektrona unutar orbita atoma koji emitiraju elektromagnetski val. Pojedinačni prijelazi se mogu smatrati polarizirani. Primjer takvih prijelaza imamo kod žarne niti ili živine lampe. Svjetlost dobivena dužim vremenskom intervalom od takvih izvora je nepolarizirana. To je stoga što takvi izvori sadrže mnoštvo atoma koji emitiraju elektromagnetske valove, prijelazi se događaju na različite načine. Ukupna svjetlost koju dobijemo takvim izvorom je zbroj svih dobivenih emisijom iz atoma. Statistički gledano vektori takve svjetlosti se nalaze u svim smjerovima okomito na smjer širenja, što je ukupno gledano nepolarizirana svjetlost. Kako električni vektori titraju okomito na smjer širenja vala njihove se komponente mogu rastaviti na dvije međusobno okomite komponente. Nepolarizirana svjetlost se u geometrijskoj optici prikazuje simbolom [**Slika18(a)**]. Linearno polarizirani val koji titra u ravnini crtanja dan je na [**Slika18(b)**]. Val okomito polariziran na ravninu crtanja je dan na [**Slika18(c)**]. Kao ravnina polarizacije linearnog elektromagnetskog vala se uzima ravnina u kojoj titra električno polje.

**Slika18(a,b,c)**



Postoji veliki broj fizikalnih eksperimentalnih tehnika pomoću kojih se može od nepolariziranog elektromagnetskog vala dobiti usmjereno titranje električnog polja, odnosno polarizirani elektromagnetski val. Jedna od takvih fizikalnih eksperimentalnih tehnika je polarizacija elektromagnetskog vala (svijetlosti) refleksijom o glatku proziru površinu dielektrika, odnosno interakciju elektromagnetskog vala i materije. Matematički teorijski izvod refleksije elektromagnetskog vala o prozirno dielektrično sredstvo dao je Francuski fizičar **Augustin Jean Fresnel** (1788 – 1827). Ovaj rad se bavi polarizacijom elektromagnetskog vala tehnikom refleksije.

## 4.2. Fresnelove jednadžbe

**Fresnelove** jednadžbe daju matematički teorijski izvod refleksije, transmisije i polarizacije elektromagnetskog vala. **Fresnelov** matematički izvod jednadžbi zasniva se na klasičnoj fizici, poznavanju refleksije elektromagnetskog vala o glatkoj plohi, **Snelliusov** zakon loma svijetlosti, te **Maxwellovim** jednadžbama elektromagnetskog vala prijelaza iz jednog sredstva u drugo i njihovim odgovarajućim rubnim uvjetima prijelaza. Jednadžbe kao posljedicu daju matematički teorijski opis stupnja polarizacije reflektiranog vala.

Neka nepolarizirani elektromagnetski val monokromatske svijetlosti iz sredstva indeksa loma  $n_1$  pada na proziru glatku plohu dielektričnog sredstva indeksa loma  $n_2$  pod kutom  $\vartheta_{up}$ . Tad se po zakonu geometrijske optike dio zrake reflektira pod kutom  $\vartheta_{rf}$  koji je jednak kutu upada  $\vartheta_{up} = \vartheta_{rf}$ , dok se drugi dio zrake lomi pod kutom  $\tau_{tr}$  transmisijom kroz sredstvo indeksa loma  $n_2$  po **Snelliusovom** zakonu  $n_1 \sin(\vartheta_{up}) = n_2 \sin(\tau_{tr})$  (148). Kutovi su definirani u odnosu na okomicu plohe sredstva indeksa loma  $n_2$  [**Slika19**]. Ako se zraka širi iz optički rjeđeg sredstva indeksa loma  $n_1$  u optički gušće sredstvo indeksa  $n_2$  tada se ona lomi prema okomici, vrijedi  $\vartheta_{up} > \tau_{tr}$  uz  $n_1 < n_2$ . U drugom slučaju, ako se zraka širi iz optički gušćeg sredstva indeksa loma  $n_1$  u optički rjeđe sredstvo  $n_2$ , tad se ona lomi od okomice, vrijedi  $\vartheta_{up} < \tau_{tr}$  uz  $n_1 > n_2$ . Kako se elektromagnetski val širi iz jednog optičkog sredstva u drugo, naboj u atomima čestica sredstva dolazi u interakciju sa električnim poljem vala, što kao posljedicu ima smanjivanje brzine elektromagnetskog vala. Prelazak jednadžbi širenja vala kroz vakuum na jednadžbe širenja kroz sredstvo vrši se zamjenom  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r$  (149), je  $\varepsilon_r$  relativna permitivnost dielektrika ovisna o materijalu, te

zamjeni permeabilnosti vakuumu  $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu_r$  (150), je  $\mu_r$  relativna permeabilnost dielektrika.

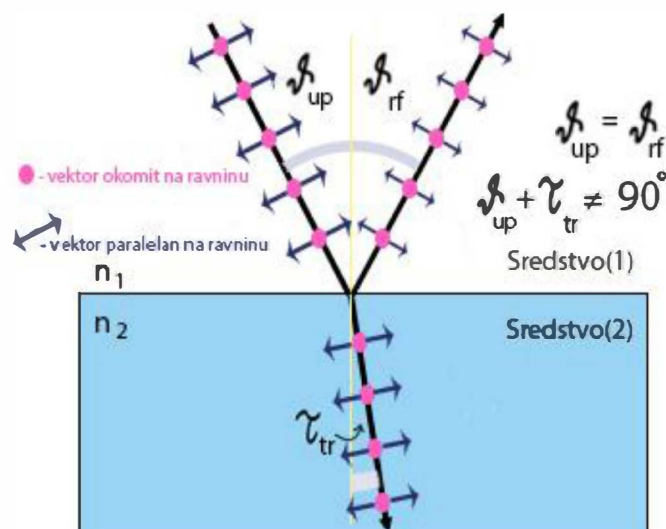
Tad se izraz za brzinu elektromagnetskog vala u vakuumu  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$  (135), svodi na

brzinu elektromagnetskog vala u dielektriku  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$  (151), i definira se indeks

loma  $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ . Brzina elektromagnetskog vala u prvom optičkom sredstvu indeksa loma  $n_1$ ,

je  $v_1 = \frac{c}{n_1}$  (152), dok je brzina u drugom sredstvu indeksa  $n_2$ ,  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  (153).

**Slika19.**



Kako se nepolarizirani elektromagnetski val svjetlosti širi se iz sredstva indeksa loma

$n_1$  prema prozirnoj glatkoj plohi dielektričnog sredstva indeksa loma  $n_2$  pod kutom  $\vartheta_{up}$ .

upadno širenje elektromagnetskog vala (fizikalnom optikom) može se odvijati duž samo jedne

ravne linije, nazovimo ju z os. Vektori električnog polja nepolariziranog vala titraju okomito

na z os. Svaki taj vektor se može rastaviti u dvije okomite komponente. Izbor ravnine na koju

se komponente vektora rastavljaju je potpuno proizvoljan. To omogućava da se isti fizikalni

fenomen prikaže različitim matematičkim reprezentacijama. Time su svi vektori električnog

polja (elektromagnetskog vala) rastavljeni na dvije komponente. Neka su komponente vektora

rastavljenih na ravninu refleksije prikazani s  $\vec{E}_{||}$ , dok su komponente vektora rastavljenih na

okomitu ravninu prikazani s  $\vec{E}_{\perp}$ . Ključni izvod **Fresnelovih** jednadžbi dobije se na granici dva

sredstva, kad val prelazi iz jednog sredstva u drugo. Tad postoji kontinuirani prijelaz iz



jednog sredstva u drugo. Primjena **Maxwellovih** jednažbi za električne i magnetske vektore vala na granici dva sredstva daje granične uvjete.

Uzmimo kao primjer jedan električni(i njegov pripadni magnetski) vektor elektromagnetskog vala koji upada koso na granicu dva sredstva, [Slika20], taj se vektor, koji ulazi pod nekim kutom u odnosu na granicu, dva sredstva može rastaviti na horizontalnu i vertikalnu komponentu. Primjenom pripadnih **Maxwellovih** jednažbi na ovaj vektor prijelaza kroz dva sredstva, tražimo granične uvjete:

1.)

Primjena 1.**Maxwellove** jednažbe  $\oint_P \vec{E} \cdot d\vec{P} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV$  (91) na prethodno definirani vektor električnog polja:

Neka se vektor  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{vertikalno}} + \vec{E}_{\text{horizontalno}}$  nalazi unutar zatvorene plohe valjka (visine =  $V_{\text{vis,v}}$ , širine =  $\check{S}_{\text{šir,v}}$ ), tako da prolazi iz sredstva(1) u sredstvo(2). Tad u svakom sredstvu postoji vertikalna i horizontalna komponenta tog vektora, označimo ih s ( $\vec{E}_{\text{vertikalno.n1}}$ ,  $\vec{E}_{\text{vertikalno.n2}}$ ,  $\vec{E}_{\text{horizontalno.n1}}$ ,  $\vec{E}_{\text{horizontalno.n2}}$ ). Lijeva strana 1.**Maxwellove** jednažbe poprima oblik  $\epsilon_r \epsilon_0 \oint_P \vec{E} \cdot d\vec{P}$ , dok desna strana nema slobodnog naboja kod dielektrika koji se širi elektromagnetski val, stoga je  $\rho = 0$ . Prethodno definirani Gaussov zakon (3.2) kaže da vektor koji izlazi iz zatvorene plohe ima pozitivan predznak, dok onaj koji ulazi u plohu ima negativan predznak. Kako vektor prolazi vertikalno prema dolje iz sredstva(1), ulazi u sredstvo(2) te na drugoj strani valjka izlazi van iz plohe A, [Slika20(a)]. Vertikalna komponenta vektora je suprotnog smjera od gibanja vektora  $\vec{E}$ . Posljedica toga je da komponenta u sredstvu(1) izlazi iz plohe A valjka, čime je definiran pozitivan predznak. Daljnjim gibanjem vektora  $\vec{E}$  kroz sredstvo(2) on prolazi kroz donju plohu A valjka. Posljedica toga je da vertikalna komponenta sada ulazi u zatvorenu plohu valjka, čime je definiran negativan predznak. Primjena 1.**Maxwellove** na ovaj slučaj glasi

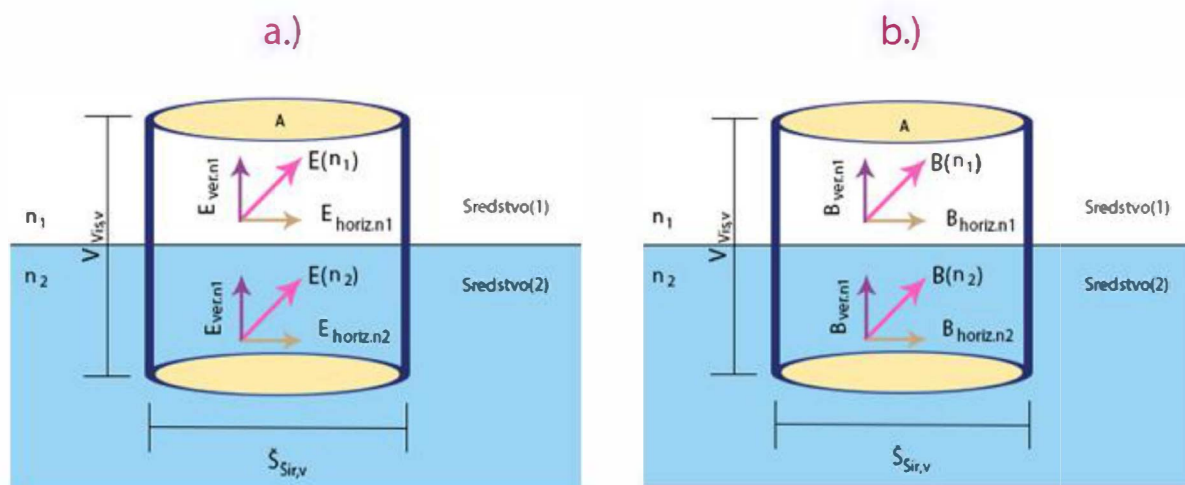
$$\epsilon_{r1}\epsilon_0 \vec{E}_{\text{vertikalno.n1}} A - \epsilon_{r2}\epsilon_0 \vec{E}_{\text{vertikalno.n2}} A + \lambda = 0 \quad (154)$$

$\lambda$  je doprinos vektora koji izlaze horizontalno iz plohe valjka. **Granični uvjet** ovog slučaja se dobije simetričnim smanjivanjem visine valjka prema granici dva sredstva.

Tad iznos visine ide prema nuli  $\lim_{V_{vis,v} \rightarrow 0}$ , što povlači da doprinosi u horizontalnom smjeru idu prema nuli,  $\lambda \rightarrow 0$ . Sređivanjem izraza (154) slijedi

$$\varepsilon_{r1} \vec{E}_{\text{vertikalno.n1}} = \varepsilon_{r2} \vec{E}_{\text{vertikalno.n2}} \quad (155)$$

Slika20(a,b)



2.)

Primjena 2. **Maxwellove** jednadžbe  $\oint_p \vec{B} \cdot d\vec{P} = 0$  (94) na prethodno definirani kosi vektor  $\vec{B}$  magnetskog polja:

Postupak se vrši na isti način kao u prethodnom slučaju 1), samo što se umjesto vektora  $\vec{E}$  nalazi vektor magnetskog polja  $\vec{B}$ , koji ima odgovarajuće komponente u sredstvima, označimo ih s ( $\vec{B}_{\text{vertikalno.n1}}$ ,  $\vec{B}_{\text{vertikalno.n2}}$ ,  $\vec{B}_{\text{horizontalno.n1}}$ ,  $\vec{B}_{\text{horizontalno.n2}}$ ). Vektor se nalazi unutar zatvorene plohe valjka na isti se način kao u prethodnom slučaju giba kroz sredstva [Slika20(b)]. Primjena 2. **Maxwellove** jednadžbe glasi:

$$\vec{B}_{\text{vertikalno.n1}} A - \vec{B}_{\text{vertikalno.n2}} A + \lambda = 0 \quad (156)$$

$\lambda$  je doprinos vektora koji izlaze horizontalno iz plohe valjka. **Granični uvjet** ovog slučaja se dobije simetričnim smanjivanjem visine valjka prema granici dva sredstva. Tad iznos visine ide prema nuli  $\lim_{v_{vis,p} \rightarrow 0}$ , što povlači da doprinosi u horizontalnom smjeru idu prema nuli,  $\lambda \rightarrow 0$ . Sređivanjem izraza (156) slijedi

$$\vec{B}_{\text{vertikalno.n1}} = \vec{B}_{\text{vertikalno.n2}} \quad (157)$$

3.)

Primjena 3. **Maxwellove** jednadžbe  $\oint_{\text{Kr}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_P \vec{B} \cdot d\vec{P}$  (106) na prethodno definirani vektor električnog polja:

Lijeva strana jednadžbe nalaže integriranje električnog polja po zatvorenoj krivulji.

Neka se vektor  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{vertikalno}} + \vec{E}_{\text{horizontalno}}$  nalazi unutar zatvorene krivulje

pravokutnika (vertikalne stranice =  $a_{\text{vis,p}}$ , horizontalne stranice =  $b_{\text{šir,p}}$ ), tako da

prolazi iz sredstva(1) u sredstvo(2). Tad u svakom sredstvu postoji vertikalna i

horizontalna komponenta tog vektora, označimo ih s ( $\vec{E}_{\text{vertikalno.n1}}$ ,  $\vec{E}_{\text{vertikalno.n2}}$ ,

$\vec{E}_{\text{horizontalno.n1}}$ ,  $\vec{E}_{\text{horizontalno.n2}}$ ). Neka se integriranje odvija smjerom kazaljke na

satu duž zatvorene pravokutne krivulje [**Slika20(c)**]. Tad se vertikalne komponente

vektora  $\vec{E}$  sredstva(1) projiciraju samo na dvije vertikalne stranice pravokutnika tog

sredstva(1). Ista se projekcija odvija kod vertikalne komponente u sredstvu(2). Zatim se

horizontalna komponenta vektora u sredstvu(1) projicira na horizontalni dio

pravokutnika sredstva(1), ista se projekcija odvija kod horizontalne komponente u

sredstvu(2). Kako se integriranje odvija po zatvorenoj pravokutnoj krivulji smjerom

kazaljke na satu, vertikalno integrirane komponente unutar istog sredstva se

oduzimaju. **Granični uvjet** se dobije simetričnim smanjivanjem vertikalne

stranice ( $a_{\text{vis,p}}$ ) pravokutnika prema granici dva sredstva. Tad se oduzimaju

horizontalno integrirane komponente definirane u sredstvima (1 i 2). Kako se

vertikalna stranica smanjuje slijede posljedice

$$a_{\text{vis,p}} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{vertikalno integrirane komponente}) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{d}{dt} \iint_P \vec{B} \cdot d\vec{P} \rightarrow 0$$

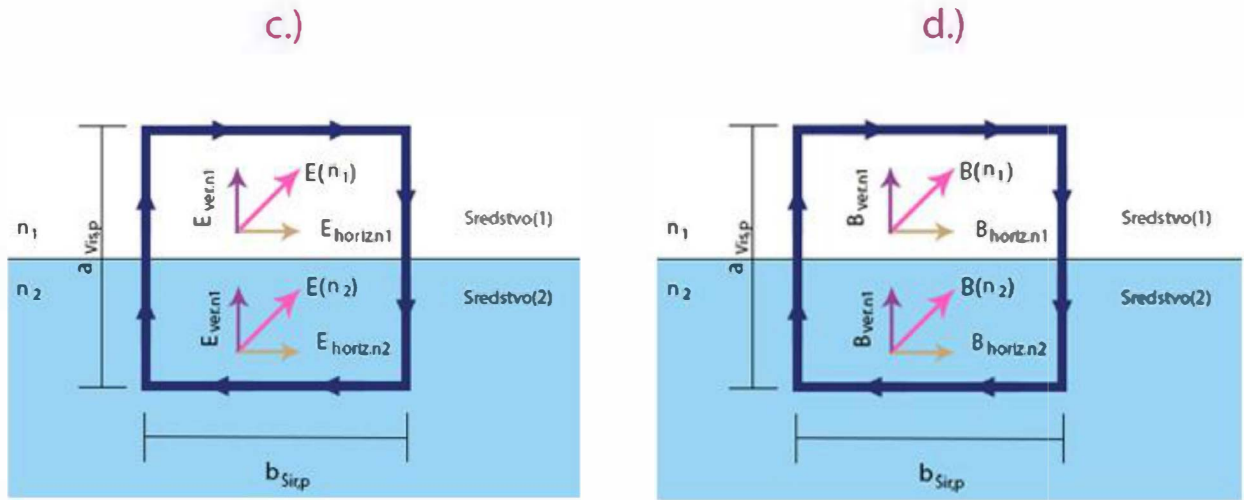
Primjena 3. **Maxwellove** jednadžbe u ovom slučaju glasi:

$$\vec{E}_{\text{horizontalno.n1}} b_{\text{šir,p}} - \vec{E}_{\text{horizontalno.n2}} b_{\text{šir,p}} = 0 \quad (158)$$

slijedi **granični uvjet**:

$$\vec{E}_{\text{horizontalno.n1}} = \vec{E}_{\text{horizontalno.n2}} \quad (159)$$

**Slika20(c,d).**



4.)

Primjena 4. **Maxwellove** jednačbe  $\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu(\iint_P \vec{J} \cdot d\vec{P} + \frac{d}{dt} \iint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P})$  (122) na prethodno definirani vektor magnetskog polja:

Neka se vektor  $\vec{B} = \vec{B}_{\text{vertikalno}} + \vec{B}_{\text{horizontalno}}$  nalazi unutar zatvorene krivulje pravokutnika (vertikalne stranice =  $a_{\text{vis,p}}$ , horizontalne stranice =  $b_{\text{šir,p}}$ ), tako da prolazi iz sredstva(1) u sredstvo(2). Tada u svakom sredstvu postoji vertikalna i horizontalna komponenta tog vektora, označimo ih s ( $\vec{B}_{\text{vertikalno.n1}}$ ,  $\vec{B}_{\text{vertikalno.n2}}$ ,  $\vec{B}_{\text{horizontalno.n1}}$ ,  $\vec{B}_{\text{horizontalno.n2}}$ ). Lijeva strana jednačbe može se pisati  $\frac{1}{\mu} \oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s}$ , dok desna strana prvog člana  $\iint_P \vec{J} \cdot d\vec{P}$  nema struje slobodnih elektrona, stoga je  $\vec{J} = 0$ . Integriranje se odvija istim principom kao u prethodnom slučaju c.), razlika je samo u vektoru magnetskog polja  $\vec{B}$  unutar zatvorene pravokutne krivulje [**Slika20(d)**]. Nakon

što su se komponente vektora integrirale duž krivulje **granični uvjet** se dobije smanjivanjem vertikalne stranice ( $a_{\text{vis},p}$ ) pravokutnika prema grani dva sredstva. Kako se vertikalna stranica smanjiva smanjuje, slijedi:

$$a_{\text{vis},p} \rightarrow 0 \implies (\text{vertikalno integrirane komponente}) \rightarrow 0 \implies \frac{d}{dt} \iint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P} \rightarrow 0$$

Primjena 4. **Maxwellove** jednadžbe ovog daje:

$$\frac{\vec{B}_{\text{horizontalno.n1}} b_{\text{šir},p}}{\mu_{r1}} - \frac{\vec{B}_{\text{horizontalno.n2}} b_{\text{šir},p}}{\mu_{r2}} = 0 \quad (160)$$

**granični uvjet:**

$$\frac{\vec{B}_{\text{horizontalno.n1}} b_{\text{šir},p}}{\mu_{r1}} = \frac{\vec{B}_{\text{horizontalno.n2}} b_{\text{šir},p}}{\mu_{r2}} \quad (161)$$

Magnetska permeabilnost  $\mu_r$  kod prozirnih dielektričnih sredstva za svjetlost je  $\mu_r \approx 1$ ,

stoga se izraz (161) za prozirna tijela uz uvjet  $\mu_r \approx \mu_{r1} \approx \mu_{r2} \approx 1$  može pisati kao:

$$(\text{za prozimo sredstvo } \mu_r \approx 1) \quad \vec{B}_{\text{horizontalno.n1}} = \vec{B}_{\text{horizontalno.n2}} \quad (162)$$

Primjenom **Maxwellovih** jednadžbi na granici dva sredstva dobiveni **granični uvjeti prijelaza** elektromagnetskog vala (svjetlosti).

$$\epsilon_{r1} \vec{E}_{\text{vertikalno.n1}} = \epsilon_{r2} \vec{E}_{\text{vertikalno.n2}} \quad (155)$$

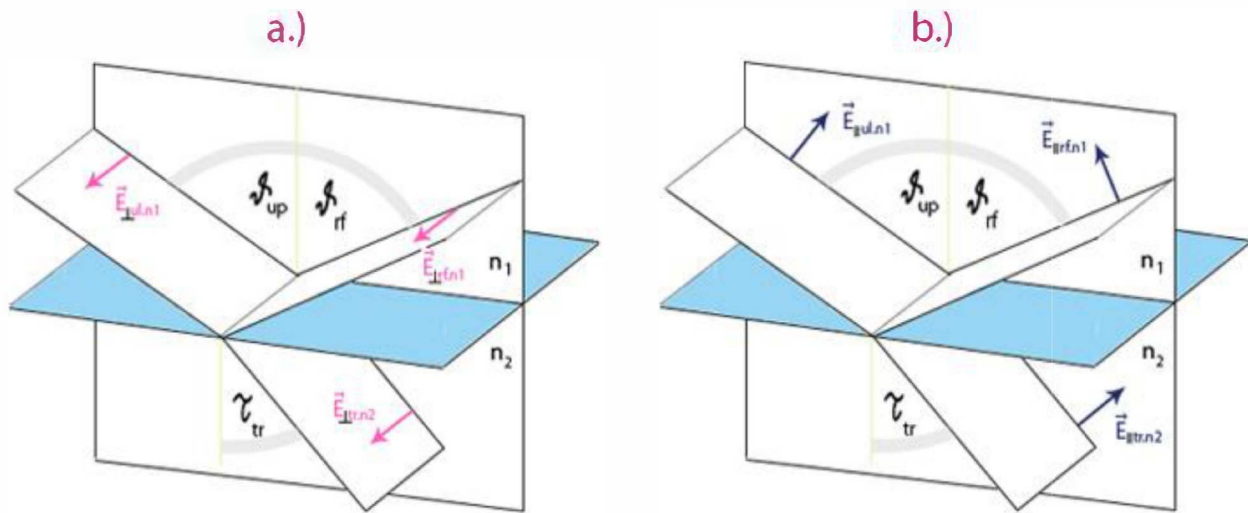
$$\vec{B}_{\text{vertikalno.n1}} = \vec{B}_{\text{vertikalno.n2}} \quad (157)$$

$$\vec{E}_{\text{horizontalno.n1}} = \vec{E}_{\text{horizontalno.n2}} \quad (159)$$

$$\vec{B}_{\text{horizontalno.n1}} = \vec{B}_{\text{horizontalno.n2}} \quad (\text{prozimo sredstvo } \mu_r \approx 1) \quad (162)$$

Izvodom ( $\vec{E}_{\text{horizontalno.n1}} = \vec{E}_{\text{horizontalno.n2}} \quad (159)$ ) horizontalnih komponenti na granici dva sredstva, koji se još naziva tangencijalni, definiran je kontinuiran prijelaz iz jednog sredstva u drugo, što je **ključni uvjet** izvoda **Fresnelovih** jednažbi. Kako se nepolarizirani elektromagnetski val prethodno definiran rastavom vektora na komponente titranja u ravnini refleksije  $\vec{E}_{\parallel}$  i okomito na ravninu refleksije  $\vec{E}_{\perp}$ , širi pod kutom  $\vartheta_{up}$  iz sredstva indeksa loma  $n_1$  u sredstvo indeksa  $n_2$ , na granici dva sredstva postoji kontinuirani prijelaz horizontalnih (tangencijalnih) komponenti  $\vec{E}_{\parallel}$  i  $\vec{E}_{\perp}$ , definiranih (159). Komponente se dijele na one koje ulaze iz sredstva(1) u granicu ( $\vec{E}_{\perp ul.n1}$ ,  $\vec{E}_{\parallel ul.n1}$ , kut ulaza  $\vartheta_{up}$ ), reflektirane komponente koje izlaze iz granice sredstva(1) ( $\vec{E}_{\perp rf.n1}$ ,  $\vec{E}_{\parallel rf.n1}$ , kut refleksije  $\vartheta_{rf}$ ), te komponente koje su transmitirane od granice kroz sredstva(2) ( $\vec{E}_{\perp tr.n2}$ ,  $\vec{E}_{\parallel tr.n2}$ , kut transmisije  $\tau_{tr}$ ). Radi jednostavnosti primjene skice u računu crtamo razdvojeno komponente vektora titranja okomite  $\perp$  ravnini refleksije [**Slika21(a)**], komponente vektora titranja paralelne  $\parallel$  na ravninu refleksije [**Slika21(b)**].

**Slika21(a,b)**



Svaka od komponenti elektromagnetskog vala na granici dva sredstva ima projekciju koja je definirana **graničnim** (rubnim) **uvjetima** prijelaza ((155), (157), (159), (162)). Na granici dva

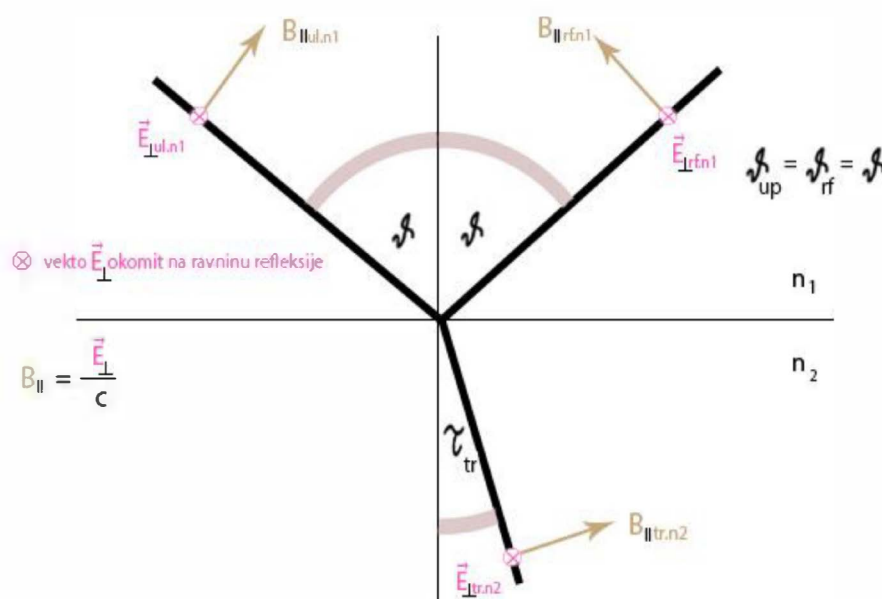
sredstva kontinuiran je prijelaz <sup>(159)</sup> horizontalnih (tangencijalnih) komponenti električnog polja:

Za okomite komponente  $\vec{E}(\perp)$ , vrijedi:

$$\vec{E}_{\perp ul.n1} + \vec{E}_{\perp rf.n1} = \vec{E}_{\perp tr.n2} \quad (162)$$

Svaki električni vektor ima pripadni okomiti magnetski vektor. Kada su električni vektori okomiti na ravninu refleksije pripadni magnetski vektori su paralelni toj ravnini. Te komponente se mogu rastavit na vertikalne i horizontalne [Slika22]. Za pripadne horizontalne komponente vrijedi granični uvjet  $\vec{B}_{horizontal.n1} = \vec{B}_{horizontal.n2}$  (prozimo sredstvo  $\mu_r \approx 1$ ) (162).

**Slika22**



Primjenom pripadnih komponenti [Slike22] i uvjeta (162) za slučaj  $\vec{E}(\perp)$ , slijedi

$$\vec{B}(\vec{E}_{\perp ul.n1})_{horizontal.n1} = \vec{B}_{\parallel ul.n1} \cos \vartheta_{up} \quad (163)$$

$$\vec{B}(\vec{E}_{\perp rf.n1})_{horizontal.n1} = -\vec{B}_{\parallel rf.n1} \cos \vartheta_{rf} \quad (164)$$

$$\vec{B}(\vec{E}_{\perp tr.n2})_{horizontal.n2} = \vec{B}_{\parallel tr.n2} \cos \vartheta_{tr} \quad (165)$$

Primjenom (162) za horizontalne komponente, slijedi:

$$\vec{B}(\vec{E}_{\perp ul.n1})_{horizontaln.n1} + \vec{B}(\vec{E}_{\perp rf.n1})_{horizontaln.n1} = \vec{B}(\vec{E}_{\perp tr.n2})_{horizontaln.n2} \quad (166)$$

Primjenom ((163), (164), (165)) na (166) slijedi ekvivalentan izvod (167)

$$\vec{B}_{\parallel ul.n1} \cos \vartheta_{up} - \vec{B}_{\parallel rf.n1} \cos \vartheta_{rf} = \vec{B}_{\parallel tr.n2} \cos \tau_{tr} \quad (167)$$

U poglavlju (3.5) za elektromagnetski val u vakuumu definiran je omjer električnog i pripadnog magnetskog vektora, kao

$$\vec{B}_y = \frac{\vec{E}_z}{c} \quad (144) \quad \text{što je ekvivalentno} \quad \vec{B}_{\parallel} = \frac{\vec{E}_{\perp}}{c} \quad (\text{vakuum}) \quad (168)$$

Kako se elektromagnetski val širi kroz dva različita sredstva, brzina mu se mijenja, te je definirana prethodnim izvodima  $v = c/\sqrt{\mu_r \epsilon_r}$  (151), pri čemu je indeks loma  $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ . Stoga je brzina elektromagnetskog vala u prvom sredstvu  $v_1 = \frac{c}{n_1}$  (152), dok je brzina u drugom sredstvu  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  (153).

Uvrštavanjem ((152) i (153)) u (168), slijedi pripadni odnos električnog i magnetskog vektora elektromagnetskog vala u sredstvima (1 i 2), slijedi

$$\frac{n_1}{c} \vec{E}_{\perp ul.n1} \cos \vartheta_{up} - \frac{n_1}{c} \vec{E}_{\perp rf.n1} \cos \vartheta_{rf} = \frac{n_2}{c} \vec{E}_{\perp tr.n2} \cos \tau_{tr} \quad (169)$$

Pokratom, te zakona refleksije svjetlosti gdje je upadni kut = reflektiranom  $\vartheta_{up} = \vartheta_{rf} = \vartheta$   $\tau_{tr} = \tau$ , slijedi

$$n_1 \vec{E}_{\perp ul.n1} \cos \vartheta - n_1 \vec{E}_{\perp rf.n1} \cos \vartheta = n_2 \vec{E}_{\perp tr.n2} \cos \tau \quad (170)$$

Uvrštavanjem  $\vec{E}_{\perp ul.n1} + \vec{E}_{\perp rf.n1} = \vec{E}_{\perp tr.n2}$  (162) u (170), slijedi

$$n_1 \vec{E}_{\perp ul.n1} \cos \vartheta - n_1 \vec{E}_{\perp rf.n1} \cos \vartheta = n_2 (\vec{E}_{\perp ul.n1} + \vec{E}_{\perp rf.n1}) \cos \tau \quad (171)$$

$$n_1 \vec{E}_{\perp ul.n1} \cos \vartheta - n_1 \vec{E}_{\perp rf.n1} \cos \vartheta = n_2 \vec{E}_{\perp ul.n1} \cos \tau + n_2 \vec{E}_{\perp rf.n1} \cos \tau \quad (172)$$

Prebacivanjem svih  $-\vec{E}_{\perp rf.n1}$  na lijevu stranu jednakosti i  $\vec{E}_{\perp ul.n1}$  na desnu, slijedi

$$-\vec{E}_{\perp rf.n1} (n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau) = -\vec{E}_{\perp ul.n1} (n_1 \cos \vartheta - n_2 \cos \tau) \quad (173)$$



Množenjem (173) sa (-1) i dijeljenjem  $\vec{E}_{\perp ul.n1}$  (  $n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau$  ), slijedi

$$\perp \quad \frac{E_{\perp rf.n1}}{E_{\perp ul.n1}} = \frac{n_1 \cos \vartheta - n_2 \cos \tau}{n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau} \quad (173)$$

To je 1. **Fresnelova jednadžba** za omjer reflektirane i ulazne okomite komponente amplitude elektromagnetskog vala ovisne o indeksima loma ( $n_1, n_2$ ) dva sredstva, te kutovima  $\vartheta_{up} = \vartheta_{rf} = \vartheta$ ,  $\tau_{tr} = \tau$ .

Omjer transmitirane i ulazne okomite komponente amplitude elektromagnetskog vala, postiže se primjenom (162) u obliku  $\vec{E}_{\perp rf.n1} = \vec{E}_{\perp tr.n2} - \vec{E}_{\perp ul.n1}$ , uvrštavanjem u pripadni (170) :

$$n_1 \vec{E}_{\perp ul.n1} \cos \vartheta - n_1 (\vec{E}_{\perp tr.n2} - \vec{E}_{\perp ul.n1}) \cos \vartheta = n_2 \vec{E}_{\perp tr.n2} \cos \tau \quad (174)$$

$$n_1 \vec{E}_{\perp ul.n1} \cos \vartheta - n_1 \vec{E}_{\perp tr.n2} \cos \vartheta + n_1 \vec{E}_{\perp ul.n1} \cos \vartheta = n_2 \vec{E}_{\perp tr.n2} \cos \tau \quad (175)$$

$$- \vec{E}_{\perp tr.n2} (n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau) = - \vec{E}_{\perp ul.n1} (n_1 \cos \vartheta + n_1 \cos \vartheta) \quad (176)$$

Množenjem (176) s (-1) i dijeljenjem s  $\vec{E}_{\perp ul.n1}$  (  $n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau$  ), slijedi

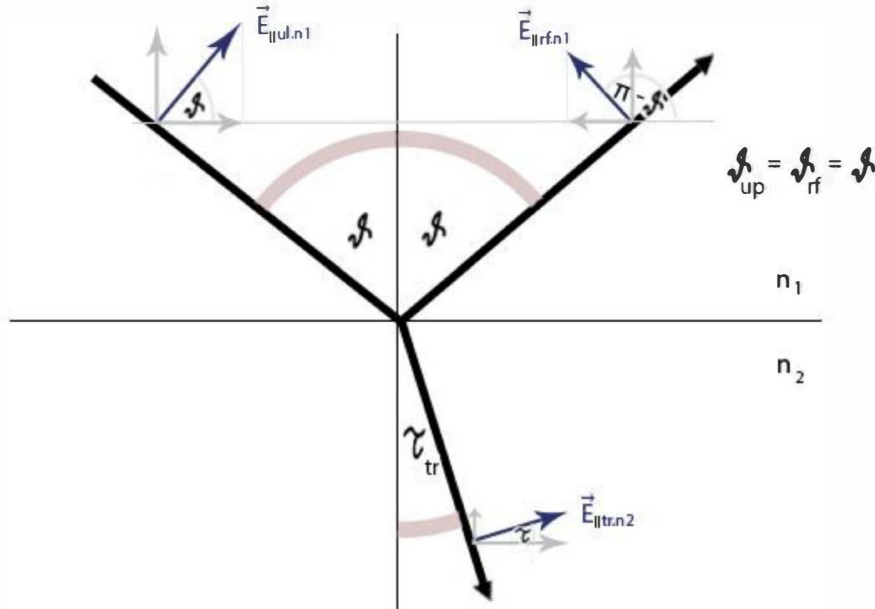
$$\perp \quad \frac{E_{\perp tr.n2}}{E_{\perp ul.n1}} = \frac{2n_1 \cos \vartheta}{n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau} \quad (177)$$

To je 2. **Fresnelova jednadžba** za omjer transmitirane i ulazne okomite komponente amplitude elektromagnetskog vala.

Daljnji razvoj **Fresnelovih** jednadžbi promatra za komponente električnog polja paralelnog || s ravninom refleksije [**Slika21(b)**]. Traže se reflektirane i transmitirane paralelne || komponente u odnosu na ulazne paralelne.

Komponente vektora električnog polja  $\vec{E}_{||}$  paralelnih s ravninom refleksije se mogu rastaviti na vertikalnu i horizontalnu komponentu [**Slika23**].

**Slika23.**



Kako je električni vektor  $\vec{E}_{||}$  paralelan s ravninom refleksije, njegov pripadni magnetski vektor  $\vec{B}_{\perp}(\vec{E}_{||})$  elektromagnetskog vala je okomit na tu ravninu, a ujedno je i horizontalan na granici dva sredstva. Stoga je na granici definiran kontinuirani prijelaz vektora  $\vec{B}_{\perp}(\vec{E}_{||})$  uvjetom prijelaza  $\vec{B}_{\text{horizontal},n1} = \vec{B}_{\text{horizontal},n2}$  (prozirno sredstvo  $\mu_r \approx 1$ ) (162).

Za paralelne komponente  $\vec{E}_{||}$

$$\vec{B}_{\perp,ul,n1}(\vec{E}_{||}) + \vec{B}_{\perp,rf,n1}(\vec{E}_{||}) = \vec{B}_{\perp,tr,n2}(\vec{E}_{||}) \quad (178)$$

**Granični uvjet** komponenti  $\vec{E}_{||}$  vektora definiran je s  $\vec{E}_{\text{horizontalno},n1} = \vec{E}_{\text{horizontalno},n2}$  (159).

Primjenom na pripadne komponente [Slika23], slijedi:

$$(\vec{E}_{||,ul,n1})_{\text{horizontalno},n1} = \vec{E}_{||,ul,n1} \cos \vartheta_{up} \quad (179)$$

$$(\vec{E}_{||,rf,n1})_{\text{horizontalno},n1} = -\vec{E}_{||,rf,n1} \cos \vartheta_{rf} \quad (180)$$

$$(\vec{E}_{||,tr,n2})_{\text{horizontalno},n2} = \vec{E}_{||,tr,n2} \cos \tau_{tr} \quad (181)$$

Primjenom (159) za horizontalne komponente, slijedi:

$$(\vec{E}_{||ul.n1})_{horizontalno.n1} + (\vec{E}_{||rf.n1})_{horizontalno.n1} = (\vec{E}_{||tr.n2})_{horizontalno.n2} \quad (182)$$

Primjenom (179), (180), (181) na (182) slijedi ekvivalentan izvod (183):

$$\vec{E}_{||ul.n1} \cos \vartheta_{up} - \vec{E}_{||rf.n1} \cos \vartheta_{rf} = \vec{E}_{||tr.n2} \cos \tau_{tr} \quad (183)$$

Uvrštavanjem u (178) prethodno definiranih odnosa električnog i magnetskog vektora, slijedi:

$$\vec{B}_y = \frac{\vec{E}_z}{c} \quad (144) \quad \text{što je ekvivalentno} \quad \vec{B}_\perp = \frac{\vec{E}_\parallel}{c} \quad (\text{vakuum}) \quad (184)$$

Pripadna brzina elektromagnetskog vala u sredstvu(1) je  $v_1 = \frac{c}{n_1}$  (152), dok je brzina u drugom sredstvu  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  (153). Uvrštavanjem ((152), (153)), u (184) zatim u (178), slijedi

$$\frac{n_1}{c} \vec{E}_{||ul.n1} + \frac{n_1}{c} \vec{E}_{||rf.n1} = \frac{n_2}{c} \vec{E}_{||tr.n2} \quad (185)$$

Množenjem (185) sa  $\frac{c}{n_2}$ , slijedi:

$$\frac{n_1}{n_2} (\vec{E}_{||ul.n1} + \vec{E}_{||rf.n1}) = \vec{E}_{||tr.n2} \quad (186)$$

Uvrštavanjem (186) u (183), slijedi

$$\vec{E}_{||ul.n1} \cos \vartheta_{up} - \vec{E}_{||rf.n1} \cos \vartheta_{rf} = \frac{n_1}{n_2} (\vec{E}_{||ul.n1} + \vec{E}_{||rf.n1}) \cos \tau_{tr} \quad (187)$$

Množenjem (187)  $n_2$  te uvjetom refleksije  $\vartheta_{up} = \vartheta_{rf} = \vartheta$ ,  $\tau_{tr} = \tau$ , slijedi

$$n_2 \vec{E}_{||ul.n1} \cos \vartheta - n_2 \vec{E}_{||rf.n1} \cos \vartheta = n_1 \vec{E}_{||ul.n1} \cos \tau + n_1 \vec{E}_{||rf.n1} \cos \tau \quad (188)$$

$$- \vec{E}_{||rf.n1} (n_1 \cos \tau + n_2 \cos \vartheta) = - \vec{E}_{||ul.n1} (n_2 \cos \vartheta - n_1 \cos \tau) \quad (189)$$

Množenjem (189) sa (-1) i dijeljenjem sa  $\vec{E}_{||ul.n1} (n_1 \cos \tau + n_2 \cos \vartheta)$ , slijedi

$$\parallel \quad \frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} = \frac{n_2 \cos \vartheta - n_1 \cos \tau}{n_1 \cos \tau + n_2 \cos \vartheta} \quad (190)$$

To je 3. **Fresnelova jednadžba** omjer reflektirane i ulazne paralelne komponente amplitude elektromagnetskog vala.

Konačno **Fresnelove** jednadžbe potrebno je odrediti omjer transmitirane i ulazne paralelne komponente, što se postiže primjenom (185):

$$n_1 \vec{E}_{||rf.n1} = n_2 \vec{E}_{||tr.n2} - n_1 \vec{E}_{||ul.n1} \quad (185) \rightarrow (191)$$

Dijeljenjem (191) sa  $n_1$ , slijedi

$$\vec{E}_{||rf.n1} = \frac{n_2}{n_1} \vec{E}_{||tr.n2} - \vec{E}_{||ul.n1} \quad (192)$$

Uvrštavanjem (192) u (183), uz uvjet  $\vartheta_{up} = \vartheta_{rf} = \vartheta$ ,  $\tau_{tr} = \tau$ , slijedi

$$\vec{E}_{||ul.n1} \cos \vartheta - \left( \frac{n_2}{n_1} \vec{E}_{||tr.n2} - \vec{E}_{||ul.n1} \right) \cos \vartheta = \vec{E}_{||tr.n2} \cos \tau \quad (193)$$

Množenjem (193) sa  $n_1$  i sređivanjem, slijedi

$$n_1 \vec{E}_{||ul.n1} \cos \vartheta - n_2 \vec{E}_{||tr.n2} \cos \vartheta + n_1 \vec{E}_{||ul.n1} \cos \vartheta = n_1 \vec{E}_{||tr.n2} \cos \tau \quad (194)$$

$$- \vec{E}_{||tr.n2} (n_2 \cos \vartheta + n_1 \cos \tau) = - \vec{E}_{||ul.n1} (n_1 \cos \vartheta + n_1 \cos \vartheta) \quad (195)$$

Množenjem (195) sa (-1) i dijeljenjem  $\vec{E}_{||ul.n1} (n_2 \cos \vartheta + n_1 \cos \tau)$ , slijedi

$$\parallel \quad \frac{E_{||tr.n2}}{E_{||ul.n1}} = \frac{2n_1 \cos \vartheta}{n_1 \cos \tau + n_2 \cos \vartheta} \quad (196)$$

To je 4. **Fresnelova jednadžba** za omjer transmitirane i ulazne paralelne komponente amplitude elektromagnetskog vala.

### 4.3. Teorijsko određivanje stupnja polarizacije i Brewsterov kut

Primjenom trigonometrijskih formula za zbroj i razliku kutova ((197), (198), (199)) te **Snelliusovog** zakona loma  $n_1 \sin(\vartheta_{up}) = n_2 \sin(\tau_{tr})$  (148) na **Fresnelove** jednadžbe, Slijedi daljnji razvoj jednadžbe koje vode teorijskom određivanju stupnja polarizacije.

Neka su  $\rho_A$  *amplitudna reflektancija* i  $\tau_A$  *amplitudna transmitancija* definirani tako da je

$$\rho_A = E_{rf.n1}/E_{ul.n1}; \quad \text{ i } \quad \tau_A = E_{tr.n2}/E_{ul.n1};$$

*Adicijske trigonometrijske formule zbroja i razlike kutova*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \quad (197)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (198)$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1; \quad (\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = 1; \quad (199)$$

Neka je kut  $\vartheta_{up} = \vartheta = \alpha$  i  $\tau_{tr} = \tau = \beta$ , uz poznati **Snelliusov** zakon loma  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(\tau_{tr})}{\sin(\vartheta_{up})}$

Primijenimo navedeno na **Fresneloe** jednadžbe:

Primijenimo navedeno na 1.**Fresnelou** jednadžbu

$$\begin{aligned} \frac{E_{\perp rf.n1}}{E_{\perp ul.n1}} &= \frac{n_1 \cos \vartheta - n_2 \cos \tau}{n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau} = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cos \vartheta - \cos \tau}{\frac{n_1}{n_2} \cos \vartheta + \cos \tau} = \frac{\frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \vartheta - \cos \tau}{\frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \vartheta + \cos \tau} = \frac{\sin \tau \cos \vartheta - \sin \vartheta \cos \tau}{\sin \tau \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \tau} = \\ &= \frac{\sin(\tau - \vartheta)}{\sin(\tau + \vartheta)} \end{aligned}$$

$$\frac{E_{\perp rf.n1}}{E_{\perp ul.n1}} = \rho_{A\perp} = \frac{\sin(\tau - \vartheta)}{\sin(\tau + \vartheta)} \quad (173) \rightarrow (200)$$

Primijenimo navedeno na 2.**Fresnelou** jednadžbu

$$\begin{aligned} \frac{E_{\perp tr.n2}}{E_{\perp ul.n1}} &= \frac{2n_1 \cos \vartheta}{n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau} = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \cos \vartheta}{\frac{n_1}{n_2} \cos \vartheta + \cos \tau} = \frac{2 \frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \vartheta}{\frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \vartheta + \cos \tau} = \frac{2 \sin \tau \cos \vartheta}{\sin \tau \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \tau} = \\ &= \frac{2 \sin \tau \cos \vartheta}{\sin(\tau + \vartheta)} \end{aligned}$$

$$\frac{E_{\perp tr.n2}}{E_{\perp ul.n1}} = \tau_{A\perp} = \frac{2 \sin \tau \cos \vartheta}{\sin(\tau + \vartheta)} \quad (177) \rightarrow (201)$$

Primijenimo navedeno na 4.**Fresnelou** jednadžbu

$$\begin{aligned}\frac{E_{||tr.n2}}{E_{||ul.n1}} &= \frac{2n_1 \cos \vartheta}{n_1 \cos \vartheta + n_2 \cos \tau} = \frac{2 \frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \vartheta}{\frac{n_1}{n_2} \cos \vartheta + \cos \tau} = \frac{2 \frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \vartheta}{\frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \tau + \cos \vartheta} = \frac{2 \sin \tau \cos \vartheta}{\sin \tau \cos \tau + \sin \vartheta \cos \vartheta} = \\ &= \frac{2 \sin \tau \cos \vartheta}{\sin(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta - \tau)}\end{aligned}$$

$$\frac{E_{||tr.n2}}{E_{||ul.n1}} = \tau_{A||} = \frac{2 \sin \tau \cos \vartheta}{\sin(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta - \tau)} \quad (196) \rightarrow (202)$$

Primijenimo navedeno na 3. **Fresnelou** jednadžbu

$$\begin{aligned}\frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} &= \frac{n_2 \cos \vartheta - n_1 \cos \tau}{n_1 \cos \tau + n_2 \cos \vartheta} = \frac{\cos \vartheta - \frac{n_1}{n_2} \cos \tau}{\frac{n_1}{n_2} \cos \tau + \cos \vartheta} = \frac{\cos \vartheta - \frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \tau}{\frac{\sin \tau}{\sin \vartheta} \cos \tau + \cos \vartheta} = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta - \sin \tau \cos \tau}{\sin \vartheta \cos \vartheta + \sin \tau \cos \tau} = \\ &= \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta ((\sin \tau)^2 + (\cos \tau)^2) - \sin \tau \cos \tau ((\sin \vartheta)^2 + (\cos \vartheta)^2)}{\sin \vartheta \cos \vartheta ((\sin \tau)^2 + (\cos \tau)^2) + \sin \tau \cos \tau ((\sin \vartheta)^2 + (\cos \vartheta)^2)} = \\ &= \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta (\cos \tau)^2 - \sin \tau \cos \tau (\sin \vartheta)^2 - \sin \tau \cos \tau (\cos \vartheta)^2 + \sin \vartheta \cos \vartheta (\sin \tau)^2}{\sin \vartheta \cos \vartheta (\cos \tau)^2 + \sin \tau \cos \tau (\sin \vartheta)^2 + \sin \tau \cos \tau (\cos \vartheta)^2 + \sin \vartheta \cos \vartheta (\sin \tau)^2} = \\ &= \frac{(\sin \vartheta \cos \tau - \sin \tau \cos \vartheta) (\cos \vartheta \cos \tau - \sin \vartheta \sin \tau)}{(\sin \vartheta \cos \tau + \sin \tau \cos \vartheta) (\cos \vartheta \cos \tau + \sin \vartheta \sin \tau)} = \frac{\sin(\vartheta - \tau) \cos(\vartheta + \tau)}{\sin(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta - \tau)} = \frac{\frac{\sin(\vartheta - \tau)}{\cos(\vartheta - \tau)}}{\frac{\sin(\vartheta + \tau)}{\cos(\vartheta + \tau)}} = \frac{\tan(\vartheta - \tau)}{\tan(\vartheta + \tau)}\end{aligned}$$

$$\frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} = \rho_{A||} = \frac{\tan(\vartheta - \tau)}{\tan(\vartheta + \tau)} \quad (190) \rightarrow (203)$$

Prethodno dobiveni izvodi kao rezultat imaju kombinaciju matematičkih trigonometrijskih funkcija, u čijom se argumentima nalaze kutovi širenja elektromagnetskog vala kroz dva sredstva. Kad se unesu iznosi kutova funkcije poprimaju odgovarajuće matematičko ponašanje. Proučavanjem tog ponašanja funkcija, istražuje se teorijsko određivanje stupnja polarizacije funkcija  $\rho_{A||}(\vartheta)$  se monotono mijenja kad se elektromagnetski val širi iz rjeđe sredstva u gušće vrijedi;

Ako je ulazni kut  $\vartheta_{up} = \vartheta = 0$ , tada se elektromagnetski val širi duž okomice na granicu dva sredstva što vodi kutu transmisije  $\tau_{tr} = \tau = 0$ , uvrštavanjem ovih uvjeta u (190) slijedi

$$\rho_{A||}(\vartheta = 0) = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \quad (204)$$

$\rho_{A||}(\vartheta = 0) > 0$  za  $n_1 < n_2$ ; i  $\rho_{A||}(\vartheta = 0) < 0$  za  $n_1 > n_2$ . Zatim se uvrštavaju vrijednosti upadnog kuta u intervalu  $\vartheta_{up} \in < 0, \frac{\pi}{2} >$ . Funkcija se monotono mijenja. Ključni teorijski izvod dobije se kad zbroj upadnog i transmitiranog kuta dosegne devedeset stupnjeva ( $90^\circ$ ).

Kad je argument u nazivniku <sup>(203)</sup> jednak  $\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ$ , tad funkcija tangens ide u beskonačnost  $\tan(\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ) \rightarrow \infty$ . Beskonačno velik nazivnika ima kao posljedicu smanjivanje razlomka prema nuli, pa je izraz <sup>(203)</sup> jednak nuli

$$\text{za je } \vartheta_{up} + \tau_{tr} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \rightarrow \tan(\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ) \rightarrow \infty \text{ slijedi } \frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} = \rho_{A||}(\vartheta_{up}) = 0 \quad (205)$$

*Kut  $\vartheta_{up} = \vartheta_{Brewster} = \vartheta_{Br}$  naziva se kao **Brewsterov** kut.*

Primjenom **Snelliusovog** zakona <sup>(148)</sup> loma za **Brewsterov** kut, slijedi:

$$n_1 \sin(\vartheta_{Br}) = n_2 \sin(\tau_{tr}) \quad (206)$$

$$n_1 \sin(\vartheta_{Br}) = n_2 \sin(90^\circ - \vartheta_{Br}) \quad (207)$$

$$n_1 \sin(\vartheta_{Br}) = n_2 \cos(\vartheta_{Br}) \quad (208)$$

Dijeljenjem <sup>(208)</sup> sa  $n_1 \cos(\vartheta_{Br})$ , slijedi <sup>(209)</sup>

$$\tan(\vartheta_{Br}) = \frac{n_2}{n_1} \quad (209)$$

To je uvjet ulaznog kuta ( $\vartheta_{Br}$ ) elektromagnetskog vala pod kojim će reflektirana zraka biti potpuno polarizirana. Ovaj zakon je Engleski fizičar David **Brewster**(1781-1868) ustvrdio eksperimentalnim istraživanjem, mjereći velik broj kutova upada i polarizaciju reflektiranog vala u interakciji s prozirnim sredstvima.

Teorijski dokaz **Brewsterovog** zakona se temelji usporedbom paralelne  $\rho_{A||}(\vartheta_{Brewster})$  <sup>(203)</sup> i okomite  $\rho_{A\perp}(\vartheta_{Brewster})$  <sup>(200)</sup> amplitudne reflektancije kada je zadovoljen zbroj kutova ( $\vartheta_{Brewster} + \tau_{tr} = 90^\circ$ ).

Tad je paralelna  $||$  komponenta amplitudne reflektancije za **Brewsterov** kut:

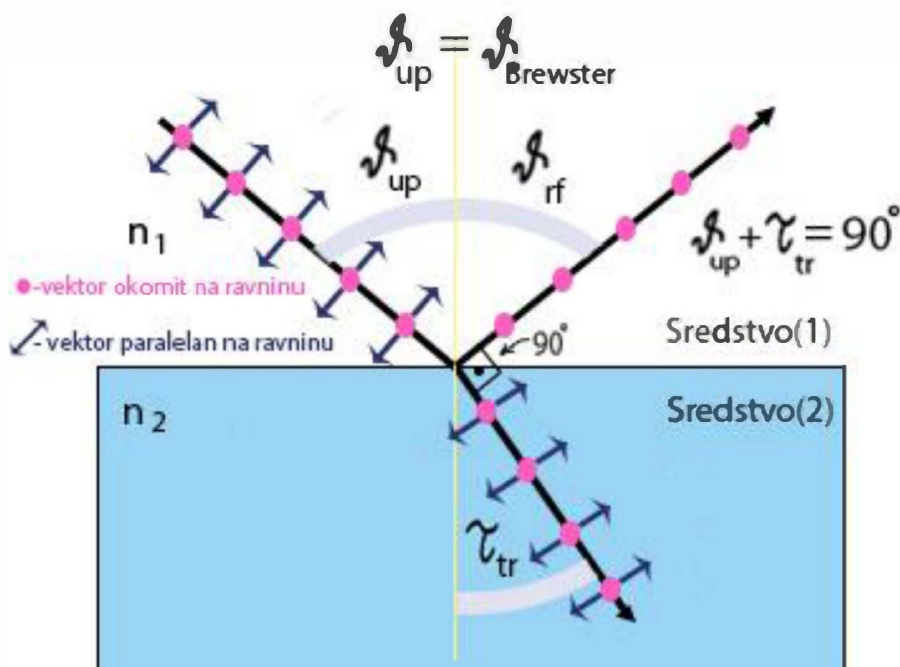
$$\text{za } (\vartheta_{Brewster} + \tau_{tr} = 90^\circ); \text{ je } \tan(\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ) \rightarrow \infty \text{ slijedi } \frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} = \rho_{A||}(\vartheta_{Brewster}) = 0 \quad (210)$$

Dok je okomita  $\perp$  komponenta amplitudne reflektancije za **Brewsterov** kut:

$$\text{za } (\vartheta_{Brewster} + \tau_{tr} = 90^\circ); \text{ tad je } (200) \frac{E_{\perp rf.n1}}{E_{\perp ul.n1}} = \rho_{A\perp}(\vartheta_{Brewster}) = \frac{\sin(\tau - \vartheta)}{\sin(\tau + \vartheta)} \neq 0 \quad (211)$$

Kako se prethodno definirani ulazni elektromagnetski val sastoji od paralelnih komponenti na ravninu refleksije i okomitih, vidljivo je da kod **Brewsterovog** kuta reflektirana paralelna komponenta iščezava ( $_{210}$ ), dok okomita komponenta ( $_{211}$ ) elektromagnetskog vala postoji. To znači da reflektirani dio elektromagnetskog vala pod **Brewsterovim** kutom ima samo okomitu komponentu. Time je val linearno polariziran jer se titranje vala može projicirati na samo jednu liniju. Slikoviti teorijski uvid polarizacije daje [Slika24]. Kad je zbroj upadnog i transmitiranog kuta jednak devedeset stupnjeva, primjenom zakona refleksije i reflektirani kut je jednak upadnom. Tad je kut između reflektiranog i transmitiranog vala pravi  $= 90^\circ$ . Tu slijedi poanta! Kad bi se sve paralelne komponente vektora vala nakon interakcije elektromagnetskog vala sa granicom na drugo sredstvo translirale na reflektiranu zraku, tad bi oni bili paralelni sa reflektiranom zrakom, što ujedno znači da bi se paralelne komponente tada u reflektiranom valu širile longitudinalno. Naime kako zakon transversalnog širenja elektromagnetskog vala ne dopušta longitudinalno titranje u smjeru širenja vala, nego samo okomito titranje na smjer širenja vala paralelni električni vektori stoga transmisijom prolaze samo kroz drugo sredstvo, dok se okomite električne komponente nastavljaju širiti reflektiranim valom u prvom sredstvu (okomito na smjer širenja).

Slika24.

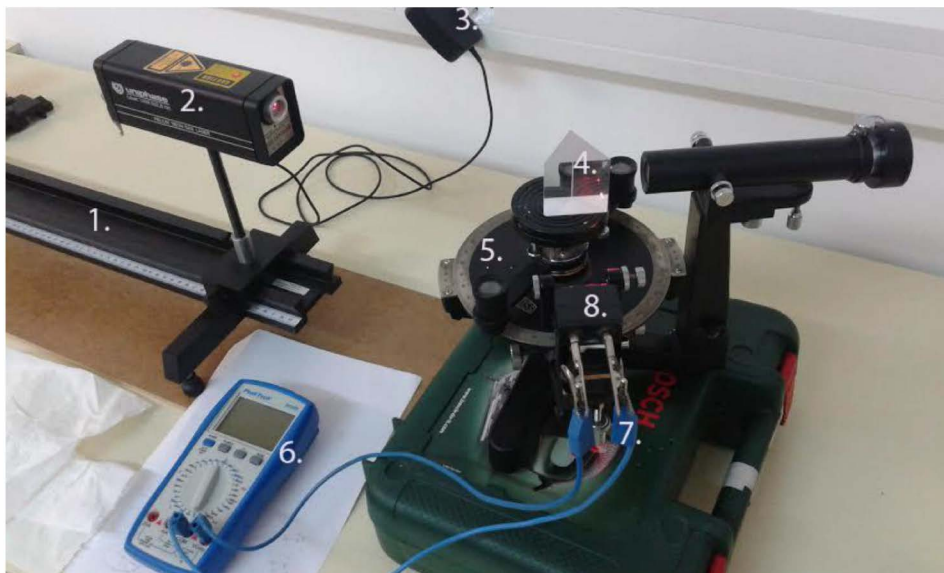




## 5. Eksperimentalno određivanje stupnja polarizacije i Brewsterov kut

Eksperimentalni postav [Slika 25] sastoji se od: 1. optičke klupe, 2. lasera kao izvora elektromagnetskog vala, 3. priključka na gradsku mrežu, 4. krunskog stakla u obliku trostrane prizme, 5. goniometra, 6. Ohm metra, 7. dva para vodiča i 8. fotoćelije (pomoćni pribor: poluprozirni zastor, stolna lampa, stalak, ogledalo).

Slika 25.



Spajanjem lasera na izvor napona on emitira usmjereni elektromagnetski val kroz sredstvo(1) koje čini zrak indeksa loma  $n_1$ . Cilj početnog djela eksperimenta je lasersku zraku usmjeriti da okomito prolazi iz sredstva(1) kroz drugo sredstvo(2), koje čini krunsko staklo indeksa loma  $n_2$ . Prizma se nalazi na stalku goniometra položena tako da jedna stranica prizme zauzima okomit položaj na ulaznu lasersku zraku. Preciznost okomitog ulaza postiže se postavljanjem prizme u položaj u kojem ulazna zraka izlazi van kroz brid nasuprotan stranici ulaza. Zatim se podese elementi goniometra i visina lasera na optičkoj klupi tako da se reflektirana zraka od prve ulazne stranice prizme vrati u izvor lasera. Fotoćelija se postavi na pomični dio goniometra povezanog s noniusom pomične mjerke, tako da reflektirana zraka pod svakim kutom može padati na detektor fotoćelije. Zatim se pomični dio goniometra postavi tako da je položaj fotoćelije ispred prizme, tako da laserska zraka prolazi sa stražnje strane kroz fotoćeliju. Tad se očita kut pri kojem se nula noniusa poklopi s vrijednošću skale

nepomičnog dijela goniometara. Ta vrijednost predstavlja odklon reflektirane zrake od okomice na ulaznu stranicu prizme (nula stupnjeva( $0^\circ$ )). Eksperimentalno mjerenje vrši se tako da se otkloni pomični dio goniometara na kojemu se nalazi fotočelija te se očita kut odklona. Zatim se zakrene metalni dio goniometra na kojemu se nalazi prizma tako da reflektirana zraka pada na detektor fotočelije koja je spojena na Ohm metar. Radi se niz odklona te se za svaki odklon mjeri vrijednost otpora na fotočeliji.

**Slika 26.**



Intenzitet reflektiranog elektromagnetskog zračenja koje pada na detektor fotočelije može se prikazati pomoću Poyntingovog vektora koji ima isti smjer kao i to elektromagnetsko zračenje. Prosječni iznos Poyntingovog vektora jednak je intenzitetu elektromagnetskog vala, a njegova se vrijednost izražava u  $W/m^2$ . Poyntingov vektor se opisuje pomoću vektorskog produkta električnog polja  $\mathbf{E}$  i magnetskog polja  $\mathbf{B}$ , te pripadne magnetske permeabilnosti sredstva  $\mu$ , kao:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} \quad (213)$$

Iznos Poyntingovog vektora jednak je:

$$S = \frac{EB}{\mu} \quad (214)$$

Uvrštavanjem  $B = \frac{E}{c}$  (144) u (213), slijedi:

$$S = \frac{E^2}{c\mu} \quad (215)$$

Iznos Poyntingovog vektora je proporcionalan s kvadratom amplitude električnog polja

$$S \propto E^2 \quad (216)$$

Intenzitet reflektiranog elektromagnetskog vala jednak je srednjoj vrijednosti Poyntingovog vektora na fotočeliji. Kako je elektromagnetski val opisan s:

$$E = E_0 \sin \omega t \quad (217)$$

$$B = B_0 \sin \omega t, \quad (218)$$

Uvrštavanjem (217) i (218) u (214) i zatim primjenom  $B = \frac{E}{c}$  (145), slijedi

$$S = \frac{E_0^2}{c\mu} (\sin \omega t)^2 \quad (220)$$

Srednja vrijednost za (219) tijekom jednog titraja vala dobije se primjenom trigonometrijske jednadžbe:

$$(\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2 = 1 \rightarrow \langle (\sin \omega t)^2 \rangle = \langle (\cos \omega t)^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

Srednja vrijednost iznosa Poyntingovog vektora (219) jednaka je intenzitetu:

$$\bar{S} = I = \frac{E_0^2}{c\mu} \frac{1}{2} \quad (221)$$

Od tud slijedi da je intenzitet proporcionalan kvadratu amplitude električnog polja:

$$I \propto E_0^2 \quad (222)$$

Kako je intenzitet elektromagnetskog vala proporcionalan s kvadratom amplitude, može se usporediti sa rješenjima Fresnelovih jednadžbi, kao:

$$\text{Izraz } \frac{E_{\perp rf.n1}}{E_{\perp ul.n1}} = \rho_{A\perp} \quad (174) \text{ kvadriranjem slijedi } \frac{(E_{\perp rf.n1})^2}{(E_{\perp ul.n1})^2} = (\rho_{A\perp})^2 = \rho_{\perp} \quad (223) .$$

Izraz  $\frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} = \rho_{A||}$  (191) kvadriranjem slijedi  $\frac{(E_{||rf.n1})^2}{(E_{||ul.n1})^2} = (\rho_{A||})^2 = \rho_{||}$  (224) .

Usporedbom (216) i (217) s (215), slijedi

$$\frac{I_{rf}}{I_{ul}} \propto \frac{(E_{\perp rf})^2}{(E_{\perp ul})^2} \quad (219) \quad \text{i} \quad \frac{I_{rf}}{I_{ul}} \propto \frac{(E_{||rf})^2}{(E_{||ul.n1})^2} \quad (225)$$

Fotoćelija koja se koristi u eksperimentu detektira otpor ovisan o intenzitetu reflektirane zrake. Vrijednosti otpora koji detektira fotoćelija prikazane su na spojenom Ohm metru [Slika25.]. Ovisnost otpora fotoćelije o intenzitetu upadne svjetlosti karakteristika je uređaja i može se pronaći u službenim podacima proizvođača fotoćelije. Za ovu ćeliju, koja je standardna 8mm CdS ćelija, karakteristična krivulja koja prikazuje ovisnost otpora o ozračenju dana je na slici [Slika 27]. Lux je jedinica za ozračenje, što je fizikalna veličina direktno proporcionalna s intenzitetom zračenja, no skalira se različito za različite valne duljine. U svakom slučaju, iz očitnog otpora može se odrediti iznos ozračenja, pa time i relativna ozračenja za različite upadne kutove laserske zrake i onda i relativni intenziteti reflektiranih zraka.

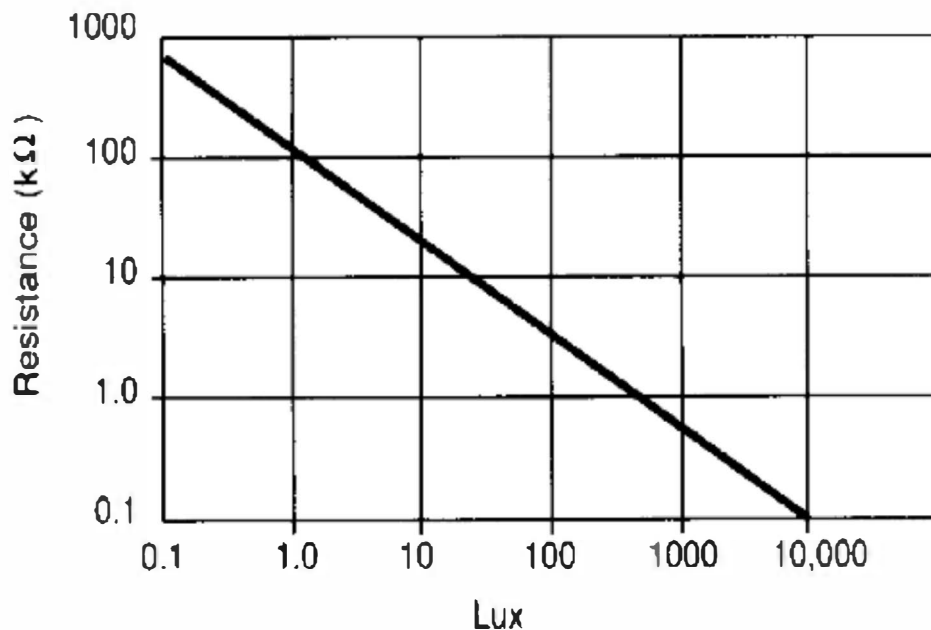
Iz slike [Slika 27] se vidi da je ovisnost nacrtana u log-log grafu, tj. može se pisati:

$$R = C I^m \quad (226)$$

pri čemu se eksponent može odrediti iz grafa pomoću neke dvije točke i u ovom slučaju iznosi

$$m = \frac{\log(R_1/R_0)}{\log(I_1/I_0)} = \frac{\log(100/0.1)}{\log(1/10000)} = -\frac{3}{4} \quad (227)$$

Slika 27.



Dakle, funkcijska ovisnost otpora o osvijetljenosti dana je s:

$$R = CI^{-\frac{3}{4}} \quad (228)$$

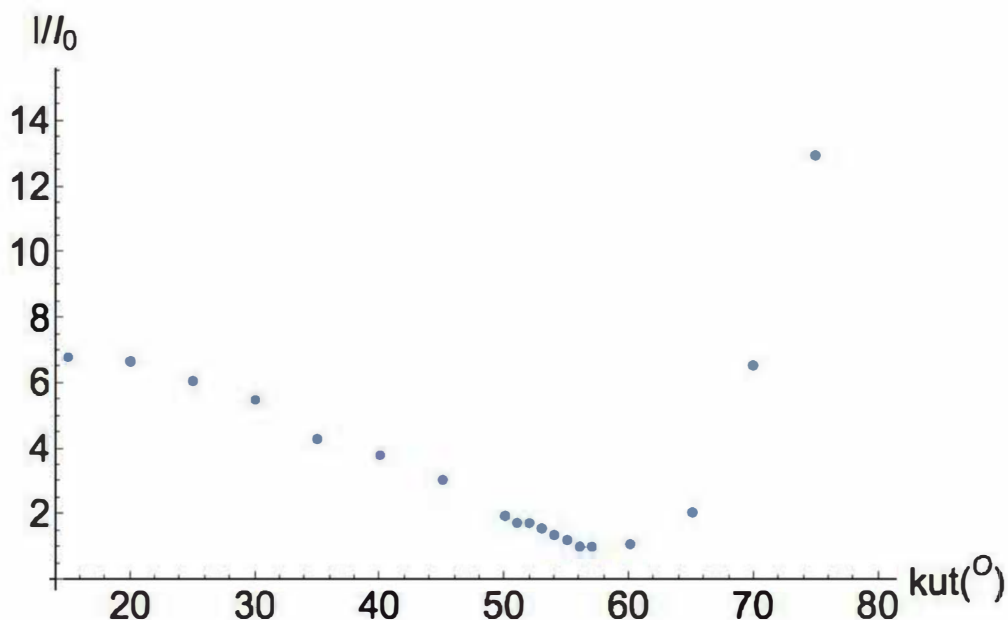
**Tablica2** sadrži prikaz eksperimentalnog mjerenja otpora detektiranog u fotoćeliji u ovisnosti o kutu reflektirane zrake o krunsko staklo[Slika26.]. Za svaki je kut vršeno nekoliko mjerenja te je upisana pripadna srednja vrijednost rezultata. Kako nas zanimaju omjeri intenziteta, u tablici su najprije dani omjeri otpora, a zatim i omjeri intenziteta. Kao referentna točka odabrana je ona pri kojoj je mjeren najveći otpor dobiven prilikom mjerenja.

$\vartheta_{rf} (^{\circ})$	R (kOhm)	R/R <sub>ref</sub>	I/I <sub>ref</sub> = (R/R <sub>ref</sub> ) <sup>-4/3</sup>
15	3.323	0.239	6.746
20	3.357	0.241	6.655
25	3.603	0.259	6.056
30	3.883	0.279	5.481
35	4.667	0.335	4.289
40	5.130	0.369	3.781
45	6.060	0.436	3.028
50	8.383	0.603	1.964
51	9.216	0.662	1.731
52	9.223	0.663	1.729
53	9.867	0.709	1.580
54	11.087	0.797	1.353
55	11.980	0.861	1.220
56	13.910	1	1
57	13.877	0.997	1.003
60	13.160	0.946	1.077
65	8.193	0.589	2.025

70	3.403	0.245	6.536
75	2.036	0.146	12.967
80	1.306	0.094	23.434

**Tablica2. rezultati eksperimentalnog mjerenja**

Grafički prikaz dobivenih omjera intenziteta u ovisnosti o kutu dan je na grafu 1.



**Graf 1.** grafički prikaz ovisnosti omjera intenziteta o kutu refleksije  $\vartheta$

Iz teorijskog razmatranja u poglavlju [ 4.] proizlazi da će najmanji intenzitet reflektiranog elektromagnetskog zračenja u eksperimentu s prizmom (sredstvo(2)) biti pri **Brewsterovom** kutu. Dobivena ovisnost jako liči na graf izraza koji pokazuje intenzitet reflektirane komponente koja je polarizirana okomito na ravninu upada. No, u našem postavu početan smjer polarizacije laserske zrake je nepoznat, a uz to se tijekom pokusu pri promjeni položaja prizme mijenja relativan smjer polarizacije laserske zrake i ravnine upada. Ipak, mjereni intenzitet reflektirane zrake jednak je intenzitetu linearne kombinacije zraka polariziranih okomito i paralelno s ravninom refleksije. Kako su ta oba intenziteta rastuće funkcije nakon Brewsterovog kuta, a prvi je padajuća funkcija kuta prije Brewsterovog kuta, dobiveno ponašanje je i očekivano - mjereni intenzitet pada do Brewsterovog kuta, a zatim počinje naglo rasti.

Iz dobivenog mjerenja može se zaključiti da je za krunsko staklo Brewsterov kut jednak  $56^{\circ}$ , iz čega se može dobiti i indeks loma tog tipa stakla primjenom teorijskog izvoda (209) .

$$\tan(\vartheta_{Br}) = \frac{n_2}{n_1} \quad (210) \rightarrow (229)$$

Od kuda slijedi:  $n_2 = n_1 \tan(\vartheta_{Br}) = n_1 \tan(56^{\circ}) \quad (230)$

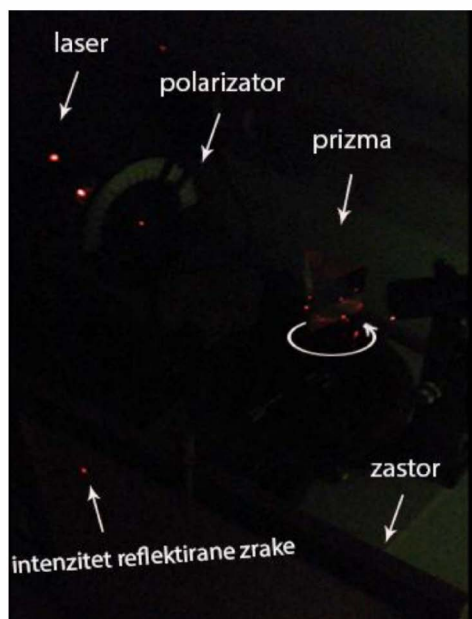
Uvrštavanjem indeksa loma zrak ( $n_1=1$ ) u (229), slijedi eksperimentalno dobiven indeks loma  $n_2$  za krunsko staklo:

$$n_2 = 1 \cdot \tan(56) = 1.48 \quad (231);$$

Što se u podudara sa indeksom loma krunskog stakla iz tablica [1.48 -1.75]dobivenog različitim eksperimentalnim fizikalnim tehnikama.

Drugi dio eksperimenta se sastojao u dokazivanju transversalnosti elektromagnetskog vala. U istom eksperimentalnom postavu dodaje se polarizator iza lasera, čime se postiže da se propušta linearno polarizirani val (poznatog smjera polarizacije), koji se odabire da bude paralelan na ravninu refleksije pri Brewsterovom kutu. U skladu s prethodno opisanom teorijom, pri **Brewsterovom** kutu prizma ne propušta paralelne komponente u smjeru reflektiranog vala. Crvena svjetlost koju emitira laser treba potpuno iščeznuti kad je kut upada jednak Brewsterovom kutu. Iza laserske zrake se u odnosu na prethodni eksperiment u ovom postavu nalazi zastor, a ne fotoćelija[Slika28.]. Sličnim eksperimentalnim postupkom kao u prethodnom slučaju (zakretanjem mehaničkog dijela na kojem se nalazi prizma, od nula do devedeset stupnjeva), reflektirana laserska zraka koja je prošla kroz polarizator do prizme se usmjerava na zastor. Sve se snima i slika.

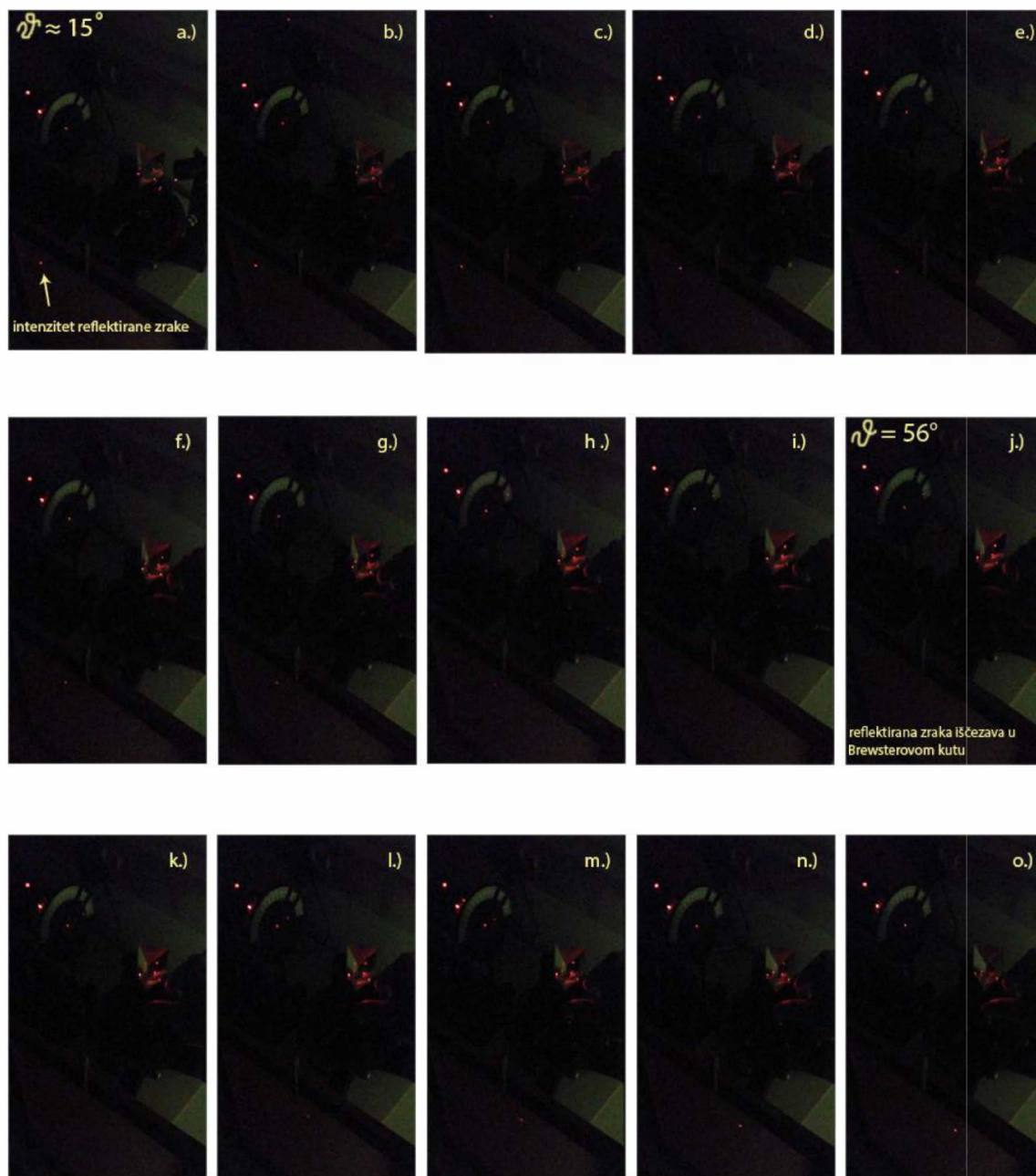
**Slika28.**



Dakle sada se polarizatorom propušta samo jedan smjer komponenti električnog polja elektromagnetskoga vala. Eksperiment je snimljen videom i slikan [Slika28.] - [Slika29.]. Kad je kut reflektirane zrake  $\vartheta \approx 15^\circ$  [Slika29.(a)] na zastoru se jasno vidi intenzitet reflektirane zrake. Kako se prizma zakreće na goniometru od petnaest stupnjeva prema devedeset, intenzitet reflektirane zrake se postepeno smanjuje [Slika29.(a - i)]. Pri **Brewsterovom** kutu koji je predviđen u prvom dijelu eksperimenta pod kutom  $\vartheta = 56^\circ$ , zraka potpuno iščezava [Slika29.(j)]. Prizma se nastavlja dalje zakretati prema kutovima većim od **Brewsterovog**, čime se dobiva projekcija reflektirane zrake na zastor, prikazana na [Slika29.(k-t)]. Kako kut reflektirane zrake raste od **Brewsterovog** kuta  $\vartheta = 56^\circ$  prema  $\vartheta \approx 80^\circ$ , intenzitet reflektirane zrake na zastoru se povećava.



Slika29.





## 6. Metodički dio

Dio diplomskog rada se direktno može primijeniti kao materijal za pripremu nastavnog sata u gimnazijskom programu srednje škole –u 4.razredu. U [6.1] razrađena je metodička priprema za izvođenje nastavnog sata.

### 6.1. Metodička priprema

<b>Vrsta Škole:</b>	Prirodoslovno matematička gimnazija
<b>Razred:</b>	Četvrti
<b>Nastavni predmet:</b>	Fizika
<b>Nastavna cjelina:</b>	Polarizacija elektromagnetskog vala
<b>Nastavna jedinica:</b>	Brewsterovog kut polarizacije

**Glavno obrazovno postignuće:** eksperimentalnim radom istražiti stupanj polarizacije reflektirane svjetlosti i Brewsterov kut.

Očekivana učenikova postignuća (ishodi učenja):

**Kognitivna domena (temeljna znanja kognitivni, spoznajni - što će učenici):**

- Opisati karakteristiku polarizacije kod transversalnog vala
- Opisati kako se pomoću polarizatora i analizatora može utvrditi vrsta širenja vala
- pomoću Snelliusovog zakona loma svjetlosti prepoznati kut pod kojim će reflektirana svjetlost biti potpuno linearno polarizirana

- primjenom Snelliusovog zakona loma svjetlosti odredi teorijski uvjet Brewsterovog kuta  $\rightarrow \tan(\vartheta_{Br}) = \frac{n_2}{n_1}$
- osmisli eksperimentalni postav za istraživanje Brewsterovog kuta polarizacije reflektirane svjetlosti
- predložiti elemente potrebne za eksperimentalni postav
- iz eksperimentalnog mjerenja odrediti Brewsterov kut
- iz rezultata eksperimentalnog mjerenja odrediti indeks loma  $n_2$  (sredstva od kojeg se svjetlost reflektirala)  $\rightarrow n_2 = n_1 \tan(\vartheta_{Br})$
- iz rezultata dobivenih eksperimentalnim mjerenjem odrediti valjanost teorijske postavke polarizacije pri Brewsterovom kutu
- osmisli eksperiment kako bi se utvrdilo vrstu širenja reflektiranog elektromagnetskog vala (svjetlosti) pri Brewsterovm kutu
- eksperimentom istražiti vrstu širenja elektromagnetskog vala (svjetlosti)
- navesti vrstu vala kojom se širi svjetlost

#### **Psihomotorička domena (vještine i sposobnosti):**

- razviti sposobnost aktivnog razmišljanja
- razviti sposobnost logičkog razmišljanja
- razviti sposobnost osmišljavanja eksperimentalnog postava za istraživanje fizikalnih pojava
- razviti sposobnost promatranja eksperimenta, te istraživanje opažanja i zaključaka
- razviti sposobnost primjene gradiva na svakodnevni život

#### **afektivna domena (vrijednosti i stavovi):**

- Izražavanje vlastitog mišljenja
- Razvijati demokratičnost i toleranciju tuđeg mišljenja
- Razvijati samokritičnost
- Razvijati samostalnost u radu i razmišljanju

**Potrebna nastavna sredstva, pomagala i ostali materijalni uvjeti rada:** projektor, kreda, ploča, projektor spojen na Internet ili islandski kristal-dvolomac, optička klupa, lasera kao izvora elektromagnetskog vala, priključka na gradsku mrežu, krunskog stakla u obliku trostrane prizme, goniometra, Ohm metra, dva para vodiča, polarizator svjetlosti, fotočelija, dva štapa na stalku, šipka 2 do 3 metra dužine, elastična opruga dugačka 2 do 3 metra, (pomoćni pribor: poluprozirni zastor, stolna lampa, stalak, ogledalo).

**Tip sata:** obrada novih nastavnih sadržaja, teorija, eksperimentalno istraživanje

**Metodički oblici rada:** frontalni rad, pojedinačni rad

**Nastavne metode:** usmeno izlaganje, razgovor, demonstracija, praktični rad na eksperimentu

Tijekom sata učenici postupno upoznaju nove elemente kako bi proširili svoje znanje. Ranije stečena znanja i vještine primjenjuju u novoj situaciji. Pri uvođenju novih elemenata, učenici dobivaju verbalne upute uz demonstraciju i vježbu.

**Korelativne veze s preostalim predmetima i područjima:** matematika, hrvatski jezik, umjetnost, povijest fizike, elektrotehnika

### **Didaktička artikulacija sata:**

#### **1) Uvodni dio (9 minuta)**

*Uvodni dio prati kratku motivacijsku priču:*

Danski liječnik **Erasmus Bartholinus** (1669) donosi sa Islanda jednu vrstu kristala za koju kaže da je jedno od najvećih čuda koje je stvorila priroda. Radi se o jednoj vrsti kristala znanom kao islandski dvolomac. Kada se gleda kroz ovaj kristal on daje dvostruku sliku predmeta. Obični prozirni kristali (npr. staklo), kada se gleda kroz njih, daju jednu sliku predmeta. **Erasmus** smatra da je došao do fundamentalnog problema o lomu svjetlosti kroz islandski dvolomac, uz to još otkriva da se svjetlost u dvolomcu lomi na dvije zrake. **Huygens** prvi pretpostavlja da se u dvolomcu radi o polarizaciji valova svjetlost.

Pariška akademija znanosti 1808. godine raspisuje nagradu za najbolje objašnjenje fenomena dvostruke slike predmeta u dvolomcu. Potaknut tom nagradom **Malus** radi niz eksperimenata sa dvolomcem. Provodeći tako dugo vremena proučavajući dvolomac, slučajno se dogodilo da ga je u jednom trenutku usmjerio prema svjetlosnoj zraci reflektiranoj od prozora jedne palače. Na veliko iznenađenje u dvolomcu se ovaj put pojavila samo jedna zraka (odnosno jedna slika predmeta).

Kut kod kojeg se u dvolomcu pojavljuje samo jedna zraka eksperimentalno je odredio škotski teolog i fizičar **David Brewster** (1781-1868). Eksperimentalno je utvrdio kut, pod kojim je potrebno da **svjetlost** upadne u prozirno dielektrično sredstvo, kako bi reflektirani dio **svjetlosti** koju je **Malus** vidio u dvolomcu bio potpuno linearno polariziran.

- Znamo da su nam elektromagnetski valovi intuitivno apstraktniji!

- Sa kojom vrstom intuitivnih valova ih možemo pokušati usporediti?
- Sa mehaničkim valovima
- Koje karakteristike znate da imaju mehanički valovi a imaju ih i elektromagnetski valovi
- Interferenciju i ogib
- Izvedimo jedan eksperiment sa mehaničkim valovima koji bi nam mogao poslužiti za bolje razumijevanje elektromagnetskih valova:

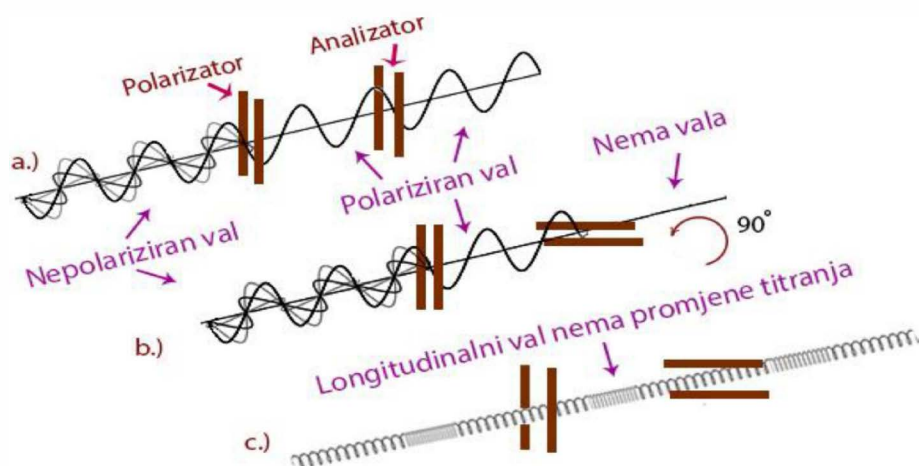
### Prvi eksperiment:

(Uzmemo eksperimentalni postav od ravnog užeta jednim krajem čvrsto privezanim, dok drugi slobodni kraj služi za titraje, te dva para jednostavnih ravnih šipki.)

Postavimo par šipki okomito zabijenih u zemlju te drugi par simetrično postavljen u odnosu na prvi. Neka ravno uže prolazi između paralelnih šipki kroz oba para [**Slika16**].

- Prozivanjem nekoliko učenika da sudjeluju u demonstracijskom izvođenju pokusa. Slobodni kraj užeta titrajte okomito u svim smjerovima, tako da se titraji prenosi valom okomito na sredstvo (uže) [**Slika16 (a)**].
- Kakvo je vaše zapažanje eksperimenta?
- Valovi od slobodnog kraja užeta (izvora) do prvog para paralelnih šipki čine nepolarizirani val. Prolaskom vala kroz prvi par šipki titranje postaje usmjereno. Čestice sredstva (užeta) titraju paralelno sa dužinom šipki.
- Zatim zakrenite drugi par šipki za  $90^\circ$  stupnjeva [**Slika16 (b)**]!
- Što očekujete da će se dogoditi sa titranjem vala iza drugog para šipki?
- Titranje se nastavlja
- Titranje prestaje
- Slobodni kraj užeta titrajte okomito u svim smjerovima, tako da se titraji prenosi valom okomito na sredstvo (uže).
- Što ste zapazili u eksperimentu?
- Prethodno linearno polarizirani val kroz prvi par šipki zakretanjem šipki za devedeset stupnjeva u drugom paru  $\rightarrow$  val prestaje trati [**Slika16.b**].
- *Kako biste osmislili eksperiment kojem biste ispitali, kakva svojstva bi longitudinalni val imao prolaskom pri uvjetima koje smo postavili za transverzalni val*
- Umjesto užeta bismo postavili elastičnu oprugu da prolazi kroz par šipki, kojoj bismo dali valni puls u smjeru položenih opruga.  
Pod istim uvjetima kao za prethodni slučaj kod transverzalnog vala
- *Položite pravocrtno oprugu kroz po dva para paralelnih šipki, te joj dajte puls u smjeru širenja vala.*
- *Pod istim uvjetima kao za transverzalni val [**Slika16.c**].*
- *Što ste zapazili u eksperimentu za longitudinalni val kroz šipke?*
- *Val se nastavlja titrati bez promjene u širenju*

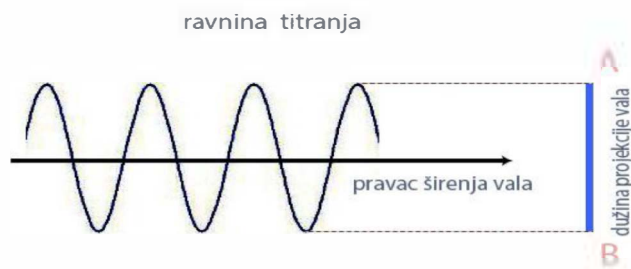
Slika 16(a,b,c).



## 2) Glavni dio (33min)

Kada smo slobodni kraj užeta titramo okomito u svim smjerovima, tako da se titraje prenosilo valom okomito na sredstvo (uže). Valovi od slobodnog kraja užeta (izvora) do prvog para paralelnih šipki činili su nepolarizirani val. Prolaskom vala kroz prvi par šipki titranje postaje usmjereno. Čestice sredstva (užeta) titraju paralelno sa dužinom šipki. Takvo titranje vala se može smjestiti u ravninu [Slika17], i val je tad transverzalno polariziran. Ako polarizirani val titra u jednoj ravnini tad je on linearno polariziran, naime val se tad u smjeru širenja može projicirati duž jedne linije. Prethodno linearno polarizirani val kroz prvi par šipki, zakretanjem u drugom paru šipki za devedeset stupnjeva val prestaje trati [Slika16.b]. To je svojstvo transverzalnih valova. Prvi par šipki nazivamo **polarizator** dok drugi par nazivamo **analizator**. Svojstvo je longitudinalnih valova da bez promjene titranja prolaskom kroz polarizator i analizator nastavljaju propagaciju titranjem.

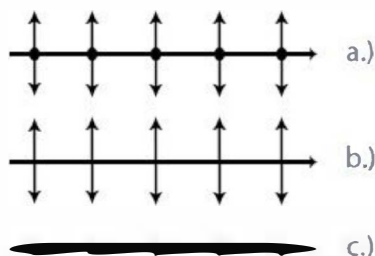
**Slika17.**



Nepolarizirani elektromagnetski val ili obična svjetlost: prethodno opisani transverzalni mehanički valovi se šire kroz sredstvo titranjem čestica sredstva okomito na smjer širenja vala. elektromagnetski valovi šire se titranjem električnih i magnetskih polja okomito na smjer širenja vala. Način na koji će električni vektori titrati ovisi o načinu kojim izvor elektromagnetskog vala titra. Ako je izvor umjetni linearni pravocrtni u kojem naboj titra pravilno (primjer ravne antene), tad je nastali elektromagnetski val transverzalan linearno polariziran (sinusoidnog oblika). Međutim, prirodni izvori elektromagnetskih valova nemaju takav stalni pravilni kontinuirani izvor. Primjeri takvih izvora mogu biti zvijezde u kojima se pod utjecajem gravitacije lakši kemijski elementi spajaju u teže, od kuda se oslobađa dio energije u obliku elektromagnetskog vala. Česti izvori elektromagnetskih valova su prijelazi elektrona unutar orbita atoma koji emitiraju elektromagnetski val. Pojedinačni prijelazi se mogu smatrati polarizirani. Primjer takvih prijelaza imamo kod žarne niti ili živine lampe. Svjetlost dobivena dužim vremenskom intervalom od takvih izvora je nepolarizirana. To je stoga što takvi izvori sadrže mnoštvo atoma koji emitiraju elektromagnetske valove, prijelazi se događaju na različite načine. Ukupna svjetlost koju dobijemo takvim izvorom je zbroj svih dobivenih emisijom iz atoma. Statistički gledano vektori takve svjetlosti se nalaze u svim smjerovima okomito na smjer širenja, što je ukupno gledano nepolarizirana svjetlost. Kako električni vektori titraju okomito na smjer širenja vala njihove se komponente mogu rastaviti na dvije međusobno okomite komponente. Nepolarizirana svjetlost se u geometrijskoj optici prikazuje simbolom [Slika18(a)]. Linearno polarizirani val koji titra u ravnini crtanja dan je na [Slika18(b)]. Val okomito polariziran na ravninu crtanja je dan na [Slika18(c)]. Kao

ravnina polarizacije linearnog elektromagnetskog vala se uzima ravnina u kojoj titra električno polje

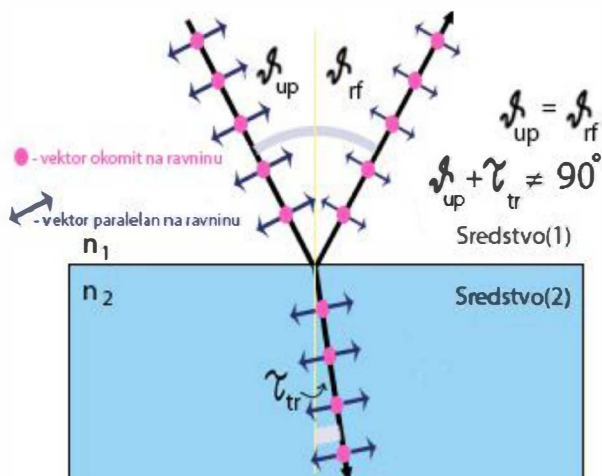
**Slika18(a,b,c)**



Postoji veliki broj fizikalnih eksperimentalnih tehnika pomoću kojih se može od nepolariziranog elektromagnetskog vala dobiti usmjereno titranje električnog polja, odnosno polarizirani elektromagnetski val. Jedna od takvih fizikalnih eksperimentalnih tehnika je polarizacija elektromagnetskog vala (svjetlosti) refleksijom o glatku prozirnu površinu dielektrika, odnosno interakcija elektromagnetskog vala i materije.

- Pomoću zakona refleksije svjetlosti od glatkog prozirnog sredstva i prethodnog teorijskog razmatranja povezanog sa slikom [Slika18(a,b,c)], skicirajte ulaznu, transmitiranu i reflektiranu zraku svjetlosti, tako da rastavite električne vektore (elektromagnetskog vala) na komponente koje titraju u ravnini refleksije i okomitoj ravnini na tu ravninu!

•

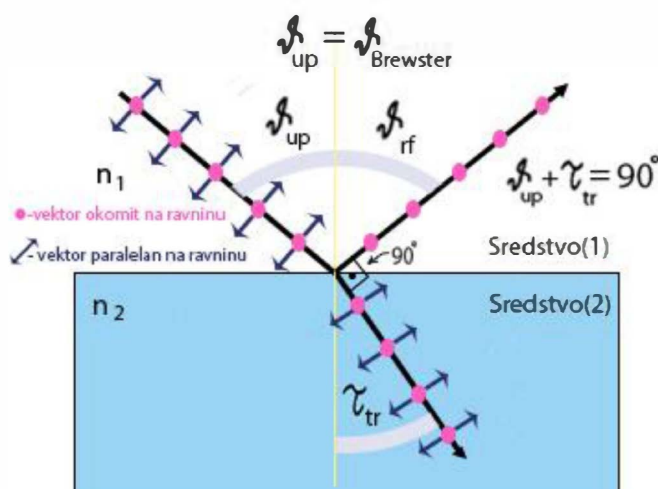




Zatim istu skicu crtamo na ploču kako bi ju svi mogli protumačiti, skica na ploči je uređena tako: da je kut između reflektirane i transmitirane zrake jednak devedeset stupnjeva. Kako su upadni i reflektirani kut kod glatkog prozirnog sredstva za refleksiju svjetlosti jednaki → onda su i kutovi ( $\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ$ ), jer je ukupni kut otklona na lijevoj strani okomice jednak  $180^\circ$  [ **Slika24.**].

(Crtanje si izvodi tako da reflektirani dio zrake na skici ostaje nepopunjen sa simbolima polarizacije. Cilj je da učenici zajednički utvrde kakav simbol polarizacije će tada imati reflektirani val)

**Slika24.**



- Kakav simbol polarizacije sada predviđate za reflektiranu svjetlost?

Kako se na granici dva sredstva ulazna zraka svjetlosti razdvaja na transmitirani i reflektirani dio.

- Razmotrimo: što bi se dogodilo kada bismo translirali električne vektore koji titraju u ravnini refleksije transmitiranog vala na granicu dva sredstva.
- Kako bi tada u granici dva sredstava titrale te paralelne komponente električnog vektora u reflektiranoj svjetlosti?
  - Titrale bi u smjeru širenja reflektirane svjetlosti
- Kakvu vrstu vala bi tada predstavljalo titranje paralelnih komponenti u reflektiranoj svjetlosti?
  - Longitudinalnu vrstu vala
- Kako bi u granici dva sredstava titrale okomite komponente električnog vektora u reflektiranoj svjetlosti?
  - Titrale bi okomito na smjer širenja vala
- Kakvu vrstu vala bi tada predstavljalo titranje okomitih komponenti u reflektiranoj svjetlosti?
  - Transverzalnu vrstu vala

- Na temelju onog što znate o elektromagnetskom valu: što biste rekli kakvo će biti konačno titranje paralelnih a kakvo okomitih komponenti u reflektiranom djelu svjetlosti?
  - Svjetlost je elektromagnetski val kod kojeg vektori električnog i na njih okomitog magnetskog polja titraju okomito na smjer širenja val.
  - Stoga očekujemo da će tada u reflektiranoj svjetlosti titrati samo okomite komponente električnih vektora

Upadni kut pod kojim se to događa nazivamo **Brewsterov** kut  $\vartheta_{up} = \vartheta_{Br}$ , reflektirana svjetlost je tada potpuno linearno polarizirana.

- Što očekujete kakav je intenzitet reflektirane svjetlosti u **Brewsterovom** kutu a kakav je izvan njega?
  - Intenzitet je proporcionalan sa amplitudom električnog polja, očekujemo da je najmanji u **Brewsterov** kutu. Jer nedostaju paralelne komponente električnog polja u reflektiranoj svjetlosti.
- Pomoću **Snelliusovog** zakona loma ( $n_1 \sin(\vartheta_{up}) = n_2 \sin(\tau_{tr})$ ) i uvjeta kojim reflektirana i transmitirana dio svjetlosti zatvaraju kut od devedeset stupnjeva u **Brewsterovom** kutu. Odredite uvjet pod kojim će biti realiziran **Brewsterov** kut!
  -

$$n_1 \sin(\vartheta_{up}) = n_2 \sin(\tau_{tr})$$

$$n_1 \sin(\vartheta_{up}) = n_2 \sin(90^\circ - \vartheta_{up})$$

$$n_1 \sin(\vartheta_{up}) = n_2 \cos(\vartheta_{up})$$

Dijeljenjem sa  $n_1 \cos(\vartheta_{up})$ , slijedi

$$\tan(\vartheta_{up}) = \tan(\vartheta_{Br}) = \frac{n_2}{n_1}$$

- Kako biste vi osmislili eksperiment u kojem biste odredili **Brewsterov** kut?
    - Pustili bismo lasersku svjetlost da prolazi kroz zrak, koji je -sredstvo indeksa loma  $n_1$ , od kuda bi okomito ulazila na staklenu prizmu. Prizma se staklo nalazi na instrumentu sa kojega se mogu očitati kutovi kako se staklo rotira.
- Zatim bismo polagano rotirali staklo tako da se reflektirana svjetlost usmjeri na instrument, sa kojeg bismo mogli odrediti intenzitet reflektirane svjetlosti

Za svaki otklon očitavamo reflektirani kut svjetlosti i bilježimo njezin intenzitet.

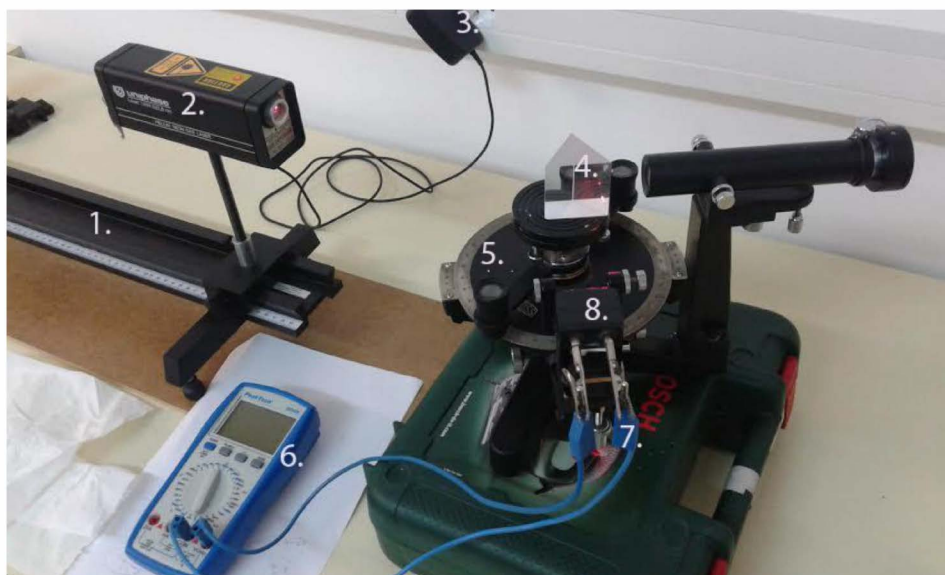
Tamo gdje je intenzitet najmanji predviđamo **Brewsterov** kut.

Napravimo eksperiment kako bismo odredili **Brewsterov** kut (Napomena: eksperiment je jako osjetljiv, potrebno je do dva sata kako bi se osjetljivost za očitavanje mjerenja namjestila. Kako bi se mjerenje moglo izvršiti tokom sata potrebno je prije sata pripremiti i namjestiti eksperimentalni postav)

### **Eksperimentalno određivanje stupnja polarizacije i Brewsterov kut**

Eksperimentalni postav [Slika 25] sastoji se od: 1. optičke klupe, 2. lasera kao izvora elektromagnetskog vala, 3. priključka na gradsku mrežu, 4. krunskog stakla u obliku trostrane prizme, 5. goniometra, 6. om metra, 7. dva para vodiča, 8. Fotoćelije 9.(pomoćnog pribora: poluprozirni zastor, stolna lampa, stalak, ogledalo).

**Slika 25.**



Spajanjem lasera na izvor napona gradske mreže on emitira usmjereni elektromagnetski val kroz sredstvo(1) koje čini zrak indeksa loma  $n_1$ . Cilj početnog djela eksperimenta je lasersku zraku usmjeriti da okomito prolazi iz sredstva(1) kroz drugo sredstvo(2), koje čini krunsko

staklo indeksa loma  $n_2$ . Prizma se nalazi na stalku goniometra položena tako da jedna stranica prizme zauzima okomit položaj na ulaznu lasersku zraku. Preciznost okomitog ulaza postiže se postavljanjem prizme u položaj u kojem ulazna zraka izlazi van kroz brid nasuprotan stranici ulaza. Zatim se podese elementi goniometra i visina lasera na optičkoj klupi tako da se reflektirana zraka od prve ulazne stranice prizme vrati u izvor lasera. Fotoćelija se postavi na pomični dio goniometra povezanog s noniusom pomične mjerke, tako da reflektirana zraka pod svakim kutom može padati na fotoćeliju. Zatim se pomični dio goniometra postavi tako da je položaj fotoćelije ispred prizme, tako da laserska zraka prolazi sa stražnje strane kroz fotoćeliju. Tad se očita kut pri kojem se nula noniusa poklopi s vrijednošću skale nepomičnog dijela goniometara. Ta vrijednost predstavlja odklon reflektirane zrake od okomice na ulaznu stranicu prizme (nula stupnjeva( $0^\circ$ )). Eksperimentalno mjerenje vrši se tako da se odkloni pomični dio goniometara na kojemu se nalazi fotoćelija te se očita kut odklona. Zatim se zakrene metalni dio goniometra na kojemu se nalazi prizma tako da reflektirana zraka pada na fotoćelije koja je spojena na om metar. Radi se niz odklona te se za svaki odklon mjeri vrijednost otpora na fotoćeliji. Princip rada fotoćelije dan je tvorničkim uputama proizvođača, u glavnom relativni intenzitet koji detektira fotoćelija obrnuto je proporcionalan

- Koji biste iznos kuta iz eksperimentalnog mjerenja uzeli kao **Brewsterov** kut?
  - Tamo gdje je intenzitet najmanji na kutu od  $56^\circ$
- Pomoću dobivenih rezultata odredite indeks loma krunskog stakla, indeks loma zraka je poznat  $n_1 = 1$

$$\tan(\vartheta_{\text{up}}) = \tan(\vartheta_{\text{Br}}) = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_2 = n_1 \tan(\vartheta_{\text{Br}}) = n_1 \tan(56^\circ) = 1.48$$

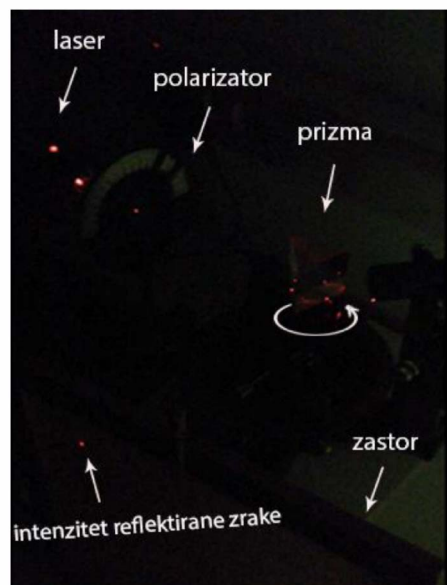
- Usporedite dobiveni indeks loma krunskog stakla za isti materijal iz službenih stranica za indeks loma tog materijala (u tablicama ili na internetu).
  - Naš je indeks loma krunskog stakla  $n_2 = 1.48$ , dok je u službenim tablicama indeks loma za nečisto krunsko staklo u rasponu  $[1.48, 1.75]$
- Što možete zaključiti o teorijskom izvodu za **Brewsterov** kut i rezultata dobivenih eksperimentalnim mjerenjem?
  - Eksperimentalno mjerenje se podudara sa teorijskim predviđanjem, stoga je rezultat dobiven eksperimentalnim mjerenjem opravdan
- Kako biste sada mogli odrediti koju vrstu valnog širenja ima svjetlost?

- Na polarizirani bismo val postavili analizator koji bismo zakrenuli okomito na ravninu u kojoj titraju električne komponente. Ako bi svjetlost iščeznula radilo bi se o transverzalnom širenju elektromagnetskih valova (svjetlosti)
- Pustili bismo da u prizmu pod **Brewsterovim** kutom ulaze samo paralelne komponente na ravninu refleksije. U koliko bi tada svjetlost iščeznula radilo bi se o transverzalnom širenju elektromagnetskih valova. Ukoliko bi svjetlost pod **Brewsterovim** kutom postojala, radilo bi se o longitudinalnoj vrsti širenja vala.

### Drugi dio eksperimenta:

Drugi dio eksperimenta se sastojao u dokazivanju transverzalnosti elektromagnetskog vala. U istom eksperimentalnom postavu dodaje se polarizator iza lasera, čime se postiže da se propušta linearno polarizirani val (poznatog smjera polarizacije), koja se odabire tako da bude paralelan na ravninu refleksije pri Brewsterovom kutu. U skladu sa prethodno opisanom teorijom u **Brewsterovom** kutu prizma sada ne propušta paralelne komponente u smjeru reflektiranog vala. Crvena svjetlost koju emitira laser treba potpuno iščeznuti kada je kut upada jednak Brewsterovom kutu. Iza laserske zrake se, za razliku od prethodnog eksperimenta nalazi zastor, a ne fotočelija [Slika 28.]. Sličnim eksperimentalnim postupkom kao u prethodnom slučaju (zakretanjem mehaničkog dijela na kojem se nalazi prizma, od nula do devedeset stupnjeva), reflektirana laserska zraka koja je prošla kroz polarizator do prizme se usmjerava na zastor. Sve se snima i slika.

Slika 28.



Sada se polarizatorom propušta samo one komponenti električnog polja elektromagnetskoga vala koje titraju u **Brewsterovom** kutu paralelno sa ravninom refleksije. Eksperiment se snima videom i slika. Kada je kut reflektirane zrake  $\vartheta \approx 15^\circ$ , na zastoru se jasno vidi intenzitet reflektirane zrake. Zatim se prizma vrti na goniometru od petnaest stupnjeva prema devedeset. Intenzitet reflektirane zrake postepeno se smanjiva, te u eksperimentalno predviđenom **Brewsterovom** kutu (pod kutom  $\vartheta = 56^\circ$ ), zraka potpuno iščezava. Prizma se nastavlja zakretati prema kutovima većim od **Brewsterovog** kuta, time se dobiva projekcija reflektirane zrake na zastoru. Kako kut reflektirane zrake raste od **Brewsterovog** kuta  $\vartheta = 56^\circ$  prema  $\vartheta \approx 80^\circ$ , intenzitet se reflektirane zrake na zastoru povećava.

- Što iz eksperimenta možete zaključiti, kakva je vrsta širenja elektromagnetski val (svjetlosti)?
  - Svjetlost se širi kao elektromagnetski val transverzalne vrste

### 3) Zaključak (3min)

**Konačni zaključak** rada: *svjetlost je elektromagnetski val transverzalne vrste, kod kojeg vektori električnog i magnetskog polja titraju međusobno okomito i zajedno titraju okomito na smjer širenja vala.*

*Zaključna motivacijska priča, nadovezana na uvodnu priču:*

Kasnije je utvrđeno da se nepolarizirana svjetlost može rastaviti na dvije komponente električnog polja: okomitu i paralelnu. Kada takva svjetlost prođe kroz dvolomac, unutar kojega postoje dva dijela sa različitim indeksima loma, dio sa jednim indeksom loma djeluje na okomitu komponentu električnog polja, dajući mu jednu vrstu loma, dok dio sa drugim indeksom loma djeluje na paralelnu komponentu električnog polja, dajući mu drugu vrstu loma. Tako u dvolomcu postoje dva polarizirana vala svjetlosti. **Malus** je gledajući reflektiranu zraku u **Brewsterom** kutu dobio samo jedan polarizirani val **svjetlosti**.

## 7. Zaključak

Rad je krenuo iz prethodno poznate činjenice da elektromagnetsko zračenje pokazuje valna svojstva interferencije i ogiba, što je postalo polazište za diplomski rad koji vrstu valnog širenja. Kako se radi o intuitivno apstraktnoj vrsti valnog širenja, kao uvod u matematičke i eksperimentalne karakteristike elektromagnetskog vala rade se intuitivno zorniji i jasniji mehanički valovi, u kojim se energija prenosi kroz sredstvo titranjem čestica oko ravnotežnog položaja do kojih dopire poremećaj. Prijenos se odvija u obliku vala gdje se prenosi samo valni poremećaj, bez translacije čestica koje titraju oko ravnotežnog položaja. Kako se energija vala može prenositi različitom vrstama titranja čestica postoje podjele vrsta valova: Za čestice sredstva koje titraju okomito na smjer širenja vala  $\rightarrow$  kaže se da je val **transverzalan** (primjer: širenje valova na vodi); dok za čestice sredstva koje titraju u smjeru širenja vala kaže se da je val **longitudinalan** (primjer: širenje zvuka kroz zrak). Vrsta kojoj val pripada može se odrediti eksperimentalnom tehnikom **polarizacije** valova (opisanom u poglavlju [4.1.]). Kao matematički važan izvod usporedbe mehaničkih valova s elektromagnetskim, ističe se primjer iz poglavlja [2.1.3] za jednadžbu transverzalnog vala na homogenoj žici. Dobiva se matematički opis valnog širenja, oblika:

$$\nabla^2 \Psi(x, y, z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (54)$$

Polaskom od poznatih činjenica kako mehanički valovi pokazuju karakteristična svojstva interferencije i ogiba te istih svojstva elektromagnetskih valova, opravdan je razlog primjene intuitivno jasnijih mehaničkih valova kao pokušaj razumijevanja apstraktnijih elektromagnetskih valova. Povučena je usporedba titranja čestica mehaničkih valova s titranjem električnih i magnetskih polja elektromagnetskog vala, uz jasno poznatu razliku dobivenu eksperimentima: za širenje mehaničkih valova potrebno sredstvo dok za elektromagnetske valove nije. Škotski fizičar **James Clerk Maxwell** formira jednadžbe koje općenito povezuju električno polje **E** i magnetsko polje **B**.

	Integralni oblik	Diferencijalni oblik
1.	$\oint_P \vec{E} \cdot d\vec{P} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

2.	$\oint_P \vec{B} \cdot d\vec{P} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0$
3.	$\oint_{Kr} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_P \vec{B} \cdot d\vec{P}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$
4.	$\oint_{Kr} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu (\iint_P \vec{j} \cdot d\vec{P} + \frac{d}{dt} \iint_P \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{P})$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$

**Tablica1. Maxwellove jednađžbe**

Diferencijalne **Maxwellove** jednađžbe iz [tablice 1.] imaju jednostruku primjenu operatora  $\vec{\nabla}$  odnosno derivacija. Po uzoru na mehanički dobivenu valnu jednađžbu za izvod valne elektromagnetske jednađžbe radi se druga derivacija (odnosno primjena drugog operatora  $\vec{\nabla}$ ) na diferencijalni oblik jednađžbi iz [Tablica1.] za slučaj u vakuumu. Slijede dvije jednađžbe:

Prvo, **valna jednađžba elektromagnetskog za električno polje.**

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (131)$$

Ovaj diferencijalni oblik se podudara s općenitim oblikom valne jednađžbe (54).

Drugo, **valna jednađžba elektromagnetskog za magnetsko polje.**

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (133)$$

Kad usporedimo ove dvije valne jednađžbe s prethodno dobivenom valnom jednađžbom (54) te uvjeta da se elektromagnetski val nalazi u vakuumu, uz permeabilnost i dielektričnost dano konstantama za vakuum ( $\mu_0, \epsilon_0$ ). Slijedi da je brzina elektromagnetskog vala

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad (134)$$

od kuda je

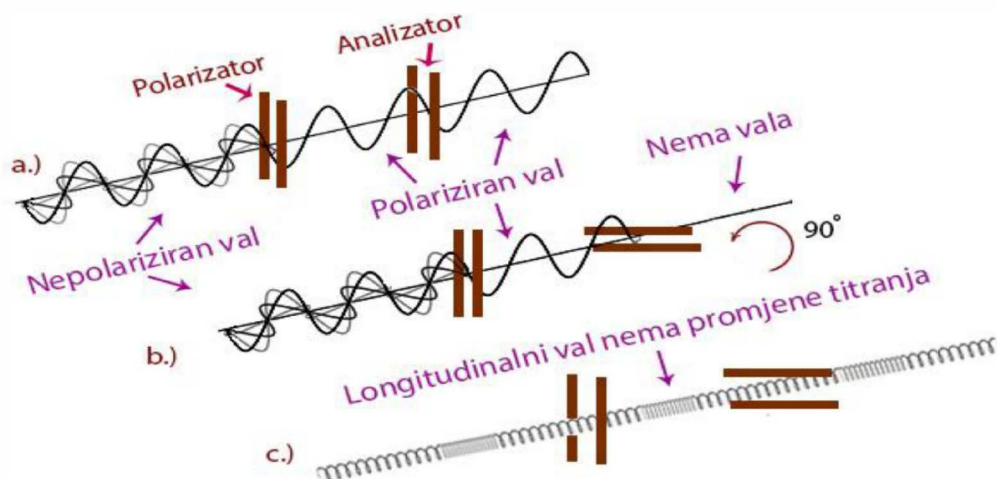
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (135).$$

Uvrštavanjem vrijednosti ( $\mu_0, \epsilon_0$ ) za vakuum, dobije se brzina  $v = c \approx 2,99793 \cdot 10^8$  m/s, koja se podudara s eksperimentalnom brzinom svijetlosti dobivenom **Michelson i Morleyevim** eksperimentom. To je potvrda o ispravnosti **Maxwellovih** koja daje uvjerljiv teorijski i eksperimentalni dokaz o valnom širenju elektromagnetskog vala.



Time je opravdan pothvat diplomskog rada, da se utvrdi vrsta širenja elektromagnetskog vala. Ponašanje apstraktnog elektromagnetskog vala se ponovno može usporediti sa intuitivno jasnijim mehaničkim valovima i karakteristikom **polarizacije** vala, opisane u poglavlju[4.1], a prikazane zornom skicom slike [Slika16(a,b,c)].

**Slika16(a,b,c).**



Ako bi elektromagnetski val bio longitudinalan, tad bi prolaskom kroz polarizator i analizator nastavio titranje širenjem bez promjene [Slika16(c)]. No, ako je val transverzalan prolaskom kroz polarizator poprima polarizirani oblik [Slika16(a)], te gubi dio intenziteta. Potpuni eksperimentalni dokaz transverznog širenja vala se postiže primjenom analizatora na polarizirani val, postupkom kojim se analizator može postaviti u položaj gdje ukupni polarizirani val iščezava [Slika16(b)]. **Upravo takav eksperimentalni pothvat je slijedio ovaj rad!**

Može postojati više eksperimentalnih tehnika polarizacije vala, a ovaj rad se bavi tehnikom refleksije elektromagnetskog vala od glatkog prozirnog **dielektričnog** sredstva. Potpuni teorijski opis takvog oblika polarizacije vala postiže se izvodom **Fresnelovih** jednačbi, u kojima se uzima transverzalan širenje elektromagnetskog vala iz jednog sredstva ( $n_1$ ) u drugo sredstvo ( $n_2$ ), pri čemu dolazi do refleksije i transmisije. Ta pretpostavka vodi na titranje električnih i magnetskih vektora okomito na smjer širenja vala. Svaki se taj vektor može rastaviti na komponente u kojem postoji proizvoljni odabir projekcija na koju se može vršiti rastavljanje komponenti. Uzima se da se rastavljanje vrši na ravninu refleksije oznake( $\parallel$ ) i okomito na tu ravninu oznake( $\perp$ ). Bez obzira emitirali laser u eksperimentu nepolarizirane ili

polarizirane elektromagnetske valove, komponente vektora se mogu rastaviti na te dvije ravnine.

Kako se elektromagnetski val širi iz jednog sredstva u drugo on se u odnosu na okomicu djelom reflektira pod kutom ( $\vartheta$ ) a djelom transmitira pod kutom ( $\tau$ ). Ključni uvjet izvoda **Fresnelovih** jednadžbi postiže se na granici dva sredstva, primjenom **Maxwellovih** jednadžbi integralnog oblika na električne i magnetske vektore vala na toj granici. Slijedi ključni rubni uvjet prijelaza, koji je za horizontalnu komponentu električnog vektora kontinuiran (159):

$$\vec{E}_{\text{horizontalno.n1}} = \vec{E}_{\text{horizontalno.n2}} \quad (159)$$

Kad se na ovaj uvjet (159) primjene tangencijalne komponente upadnog, reflektiranog i transmitiranog vala za okomite komponente  $\vec{E}$  ( $\perp$ ), slijedi:

$$\vec{E}_{\perp ul.n1} + \vec{E}_{\perp rf.n1} = \vec{E}_{\perp tr.n2} \quad (163)$$

Svaki od tih električnih vektora ima pripadni okomiti magnetski vektor. Komponente se mogu rastavit na vertikalne i horizontalne [Slika22]. Za pripadne horizontalne komponente vrijede granični uvjeti dobiveni primjenom **Maxwellovih** jednadžbi integralnog oblika, od kuda na granici dva sredstva vrijedi:

$$\vec{B}_{\text{horizontal.n1}} = \vec{B}_{\text{horizontal.n2}} \quad (\text{prozirno sredstvo } \mu_r \approx 1) \quad (162)$$

Rastavom komponenti i pripadnih kutova (upada, loma i refleksije), te primjenom rubnih uvjeta slijedi izvod **Fresnelovih** jednadžbi, detaljno obrađen u poglavlju [4.2]. Kao rezultat slijedi četiri jednadžbe omjera paralelnih( $\parallel$ ) komponenti upadnog-reflektiranog vala, te omjeri okomitih( $\perp$ ) komponenti upadnog- reflektiranog vala, te ista vrsta omjera za transmitirani i ulazni val. U eksperimentalno-teorijskom interesu oni omjeri u kojim su sadržane reflektirane komponente vala, a to su:

1.**Fresnelova** jednadžba (174) :

$$\frac{E_{\perp rf.n1}}{E_{\perp ul.n1}} = \rho_{A\perp} = \frac{\sin(\tau-\vartheta)}{\sin(\tau+\vartheta)} \quad (174) \rightarrow (201)$$

3.**Fresnelova** jednadžba (191):

$$\frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} = \rho_{A||} = \frac{\tan(\vartheta - \tau)}{\tan(\vartheta + \tau)} \quad (191) \rightarrow (204)$$

Ključni teorijski izvod slijedi kada zbroj upadnog i transmitiranog kuta u 3.**Fresnelovoj** jednažbi (204) dosegne devedeset stupnjeva. Tad je argument u nazivniku (204) jednak  $\vartheta_{up} +$

$\tau_{tr} = 90^\circ \rightarrow$  te funkcija tangens ide u beskonačnost  $\tan(\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ) \rightarrow \infty$ ;

Beskonačno velik nazivnik ima kao posljedicu smanjivanje izlaza prema nuli. Pod tim uvjetom u reflektiranom elektromagnetskom valu ostaju samo komponente vektora koje titraju okomito na ravninu refleksije, to znači da je val tada potpuno linearno polariziran. Kut upada pod kojim se to događa naziva se **Brewsterov** kut,  $\vartheta_{up} = \vartheta_{Br}$ .

kad je  $\vartheta_{up} + \tau_{tr} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \rightarrow \tan(\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ) \rightarrow \infty$  slijedi  $\frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} = \rho_{A||}(\vartheta_{up}) = 0$  (206)

*Tad je kut ( $\vartheta_{up} = \vartheta_{Br}$ ), definiran kao **Brewsterov kut** pod kojim se događa polarizacija.*

Primjenom **Snelliusovog** zakona (148) loma za **Brewsterov** kut, slijedi:

$$n_1 \sin(\vartheta_{Br}) = n_2 \sin(\tau_{tr}) \quad (207)$$

$$n_1 \sin(\vartheta_{Br}) = n_2 \sin(90^\circ - \vartheta_{Br}) \quad (208)$$

$$n_1 \sin(\vartheta_{Br}) = n_2 \cos(\vartheta_{Br}) \quad (209)$$

dijeljenjem (209) sa  $n_1 \cos(\vartheta_{Br})$ , slijedi (210)

$$\tan(\vartheta_{Br}) = \frac{n_2}{n_1} \quad (210)$$

To je uvjet ulaznog kuta ( $\vartheta_{Br}$ ) pod kojim je reflektirana zraka elektromagnetskog vala potpuno linearno polarizirana. To je bio **prvi cilj eksperimentalnog dijela rada** (potvrditi ili opovrgnuti teorijski (210) uvjet stupnja polarizacije reflektiranog elektromagnetskog vala).

Detaljni opis eksperimentalnog rada proveden je u poglavlju [5.]. Svjetlost laserske zrake se kroz sredstvo(1- zrak) pusti da okomito prođe kroz sredstvo(2- krunko staklo). krunko staklo u obliku prizme nalazi se na pomičnom djelu goniometra, dok se na drugom pomičnom dijelu s noniusom za očitavanje kutova nalazi fotoćelija. Pažljivo se prizma namjesti tako da

reflektirana zraka bude pod kutom odklona nula( $0^\circ$ ), to jest reflektirana se zraka vrati u izvor lasera, što je oznaka za  $\vartheta = 0^\circ$ . Zatim se fotoćelija spojena na pomični dio goniometra postavi tako da laserska zraka prolazi točno kroz detektor stražnje strane fotoćelije. Nonius pomičnog dijela goniometra poklopi se sa skalom na nepomičnom dijelu goniometra što se uzima kao kut odklona od  $\vartheta = 0^\circ$ . Eksperimentalno mjerenje se provodi tako da se fotoćelija od  $\vartheta = 0^\circ$ , postepeno otklanja korak po korak prema većim stupnjevima odklona. Za svaki stupanj odklona fotoćeliju zakrene se pomični dio goniometra (s prizmom) tako da reflektirana zraka potpuno pogađa fotoćelije, koja je spojena na ohm metar. Mjerni princip rada fotoćelije dan je službenim tvorničkom opisom, prikazanim u poglavlju[5.]. Svaki kut odklona reflektirane zrake i pripadne vrijednosti očitane ohm metrom dobivene detekcijom fotoćelije se bilježe. Takvo se mjerenje izvodi nizom ponavljanja računa srednja vrijednost rezultata, koja je prikazana u [Tablici2.]. Proporcionalnost intenziteta elektromagnetskog vala i kvadrata amplitude električnog polja tog vala dobije se primjenom Poyntingovog vektora:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} \rightarrow S = \frac{E^2}{c\mu} \rightarrow \bar{S} = I = \frac{E_0^2}{c\mu} \frac{1}{2} \rightarrow I \propto E_0^2$$

Sljedeća usporedba proporcionalnosti omjera intenziteta radi se kvadriranjem Fresnelovih jednadžbi:

$$\frac{I_{rf}}{I_{ul}} \propto \frac{(E_{\perp rf})^2}{(E_{\perp ul})^2} \quad (219) \quad \text{ i } \quad \frac{I_{rf}}{I_{ul}} \propto \frac{(E_{\parallel rf})^2}{(E_{\parallel ul, n1})^2} \quad (225)$$

detekcijom reflektirane zrake pomoću fotoćelije može se odrediti njen relativni intenzitet. To vodi na opravdanost proporcionalnosti omjera intenziteta i kvadrata rješenja Fresnelovih jednadžbi (219) i (225), kojima se može teorijski pretpostaviti ponašanje intenziteta kod eksperimentalnog mjerenja. Kako se u nazivniku nalazi funkcija tangens s argumentom zbroja kutova ulazne i transmitirane zrake  $\vartheta_{up} + \tau_{tr}$ , to vodi očiglednom padu intenziteta kada se upadni kut  $\vartheta_{up}$  približava **Brewsterovom** kutu, gdje je intenzitet najmanji. Zatim opet raste kako se kut povećava od **Brewsterovog** (za  $\vartheta_{up} > \vartheta_{Br}$ ). To je i teorijski opravdano jer se smanjuje paralelna ( $\parallel$ ) komponenta električnog vektora kako se upadni kut približava **Brewsterovom**, gdje potpuno iščezava paralelna komponenta.

Tad se iz rezultata eksperimentalnog mjerenja prikazanog u [Tablici2.] i pripadnog grafikona [Graf 1.] na minimalnoj vrijednosti intenziteta određuje **Brewsterov** kut, to je na  $\vartheta_{up} = 56^\circ$ .

Ako je predviđanje eksperimentalnog mjerenja točno, tada bi se taj rezultat morao podudarati sa teorijskim izvodom (210).

$$\tan(\vartheta_{Br}) = \frac{n_2}{n_1} \quad (210),$$

sljedeći:

$$n_2 = n_1 \tan(\vartheta_{Br}) = n_1 \tan(56^\circ)$$

Kako je  $n_1$  u eksperimentu indeks loma zraka, slijedi  $n_1=1$ , odnosno:

$$n_2 = 1 \cdot \tan(56^\circ) = 1.48$$

U eksperimentu se koristila prizma krunskog stakla koja je predstavljala oznaku za sredstvo(2) indeksa loma  $n_2$ . Čija vrijednost je u rasponu:

$$n_2 \in [1.48, 1.75]$$

To se podudara s vrijednosti dobivenom iz eksperimentalnog mjerenja! Dakle teorijski izvod se poklapa s eksperimentalnim. To je relevantni dokaz o ispravnosti eksperimentalnog određivanja **Brewsterovog** kuta kod krunskog stakla, koji iznosi  $\vartheta_{up} = \vartheta_{Br} = 56^\circ$ .

Prethodno opisana teorija dobivena iz **Fresnelovih** jednadžbi upućuje na fizikalnu karakteristiku reflektirane zrake pri **Brewsterovom** kutu.

Paralelna  $||$  komponenta amplitudne reflektancije kod **Brewsterovog** kuta je:

$$\text{za } (\vartheta_{Br} + \tau_{tr} = 90^\circ) \rightarrow \tan(\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ) \rightarrow \infty \text{ slijedi } \frac{E_{||rf.n1}}{E_{||ul.n1}} = \rho_{A||}(\vartheta_{Brewster}) = 0 \quad (210)$$

dok je okomita  $\perp$  komponenta amplitudne reflektancije kod **Brewsterovog** kuta:

$$\text{za } (\vartheta_{Br} + \tau_{tr} = 90^\circ); \text{ tad je (200)} \quad \frac{E_{\perp rf.n1}}{E_{\perp ul.n1}} = \rho_{A\perp}(\vartheta_{Brewster}) = \frac{\sin(\tau - \vartheta)}{\sin(\tau + \vartheta)} \neq 0 \quad (211)$$

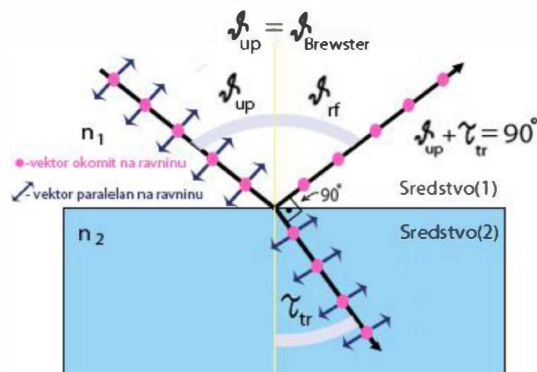
Slikovit opis elektromagnetskog vala pri **Brewsterovom** kutu prikazan je skicom [**Slika24.**].

Kad je postignut **Brewsterov** kut za ulazni val ( $\vartheta_{ul} = \vartheta_{Br}$ ), tad je po zakonu geometrijske optike refleksijom ulazni kut jednak reflektiranom ( $\vartheta_{ul} = \vartheta_{Br} = \vartheta_{rf}$ ). Kako iz uvjeta

**Brewsterovog** kuta vrijedi ( $\vartheta_{up} + \tau_{tr} = 90^\circ$ ) mora vrijediti i ( $\vartheta_{rf} + \tau_{tr} = 90^\circ$ ). Kako se kutovi refleksije i transmisije nalaze na desnoj strani okomice (žuta linija na [**Slika24.**]), ukupni maksimalni kut zbroja ( $\vartheta_{rf} + \tau_{tr}$ ) koji se može postići na toj strani jednak je  $180^\circ$ . Tad

**Brewsterov** kut između reflektiranog i transmitiranog vala iznosi  $180^\circ - (\vartheta_{rf} + \tau_{tr}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

**Slika24.**



Tu slijedi teorijska poanta! Može se vidjeti da bi paralelne ( $\parallel$ ) komponente elektromagnetskog vala titrale u smjeru širenja reflektiranog vala, što bi predstavljalo longitudinalnu karakteristiku širenja komponenti ( $\parallel$ ) u reflektiranom valu. No, iz **Fresnelovih** jednadžbi pri **Brewsterovom** kutu paralelne (na plohu refleksije) komponente elektromagnetskog vala ne mogu postojati u reflektiranom valu. Tad postoje samo okomite ( $\perp$ ) komponente električnog polja kod reflektiranog elektromagnetskog vala, što vodi potpunoj linearnoj polarizaciji vala u **Brewsterovim** kutu. Što je teorijska pretpostavka o transverzalnoj vrsti širenja elektromagnetskog vala.

Upravo ovaj teorijski iskaz bio je cilj istraživanja **drugog dijela eksperimenta**.

Postoji više mogućih eksperimentalnih tehnika kojima se može postaviti analizator na polarizirani elektromagnetski val. U ovom eksperimentalnom radu se pomoću polarizatora puštaju samo komponente ulaznog elektromagnetskog vala koje su paralelne s ravninom refleksije pri **Brewsterovom** kutu. Ako se elektromagnetski val širi transverzalno, tada bi po prethodno iskazanoj teoriji intenzitet svjetlosti na zastoru pri **Brewsterovom** kutu potpuno iščeznuo.

Eksperiment se izvodi na istom eksperimentalnom postavu kao prvi dio eksperimenta uz nekoliko promjena u postavu: umjesto fotočelije se stavi zastor na koji se projicira reflektirana zraka, te se iza lasera postavi polarizator [Slika28.]. Crvena svjetlost lasera se (polarizatorom) polarizira tako da vektori električnog polja titraju paralelno sa ravninom refleksije pri **Brewsterovim** kutu. Zatim se reflektirana zraka namjesti tako da kut otklona bude  $\vartheta_{ul} \approx \vartheta_{rf} \approx 0^\circ$ , to jest reflektirana zraka se vrati u izvor lasera. Zakretanjem pomičnog dijela goniometra

na kojem se nalazi prizma reflektirana zraka se projicira na zastor. Sve se snima, slika [Slika29] i arhivira. Iz snimke i slika se jasno vidi kako se intenzitet reflektirane zrake na zastoru postepeno smanjuje kako se kut približava **Brewsterovom**. Kad odklon dosegne **Brewsterov** kut predviđen za prizmu krunskog stakla u prvom dijelu eksperimenta na  $56^\circ$ , **intenzitet reflektirane** zrake na zastoru **potpuno iščezava**. Zatim, kako kut reflektirane zrake raste prema većim vrijednostima od **Brewsterovog** kuta intenzitet reflektirane zrake se povećava.

### **Time se eksperiment podudara s teorijskim predviđanjem!**

To vodi na **konačan zaključak** ovog rada: *Svjetlost je elektromagnetski val transverzne vrste, kod kojeg vektori električnog i magnetskog polja titraju okomito na smjer širenja vala.*

Kako je teorijski izvod imao ishodište u **Maxwellovim** jednačbama, podudaranje teorije s eksperimentom vodi na zaključak o valjanosti **Maxwellovih** jednačbi elektromagnetizma.

## **8. Literatura**

- 1) Mladen Paić – OSNOVE FIZIKE – IV dio – SVIJETLOST- HOLOGRAFIJA- LASERI-Zagreb, 1991
- 2) David J.Griffiths-Reed College- Introduction to Electrodynamics-1999 by Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey
- 3) Prof.dr.sc.Višnja Henč- Bartolić, Prof.dr.sc. Petar Kulišić – VALOVI I OPTIKA – udžbenik fizike za studente Fakulteta elektrotehnike i računalstva-3. Izdanje- Školska knjiga-Zagreb
- 4) Dr. sc.Rudlf Krsnk-FIZIKA 4- udžbenik za 4. Razred gimnazije B inačica programa- 2.izdanje-školska knjiga Zagreb-2005.
- 5) Charles Kittel-Walter D.Knight-Malvin A. Ruderman- Prvi Svezak MEHANIKA- preveo dr.NIKOLA ZOVKO-TEHNIČKA KNJIGA ZAGREB 1981